رياض عبد الرحيم عبد الحافظ عوض

الرياضيات

- مبرهنات النهاية
- المعادلات التفاضلية
- المصفوفات
- المتتاليات والمتسلسلات العددية
- نظرية الزمر
- العلاقات
- الدوال والمخططات

www.darsafa.net

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات



- مبرهنات النهاية
- المعادلات التفاضلية
- المصفوفات
- المتتاليات والمتسلسلات العددية
- نظرية الزمر
- العلاقات
- الدوال والمخططات

رياض عبد الرحيم عبد الحافظ عوض

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011/1/316)

510

عوض، رياض عبد الرحيم عبد الحافظ
الرياضيات: مبرهنات النهاية/ رياض عبد الرحيم عبد الحافظ عوض . ـ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2011.

( ) ص
ر.أ: 2011/1/316
الواصفات: الرياضيات/

◆ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص.ب 922762 عمان ـ 11192 الاردن

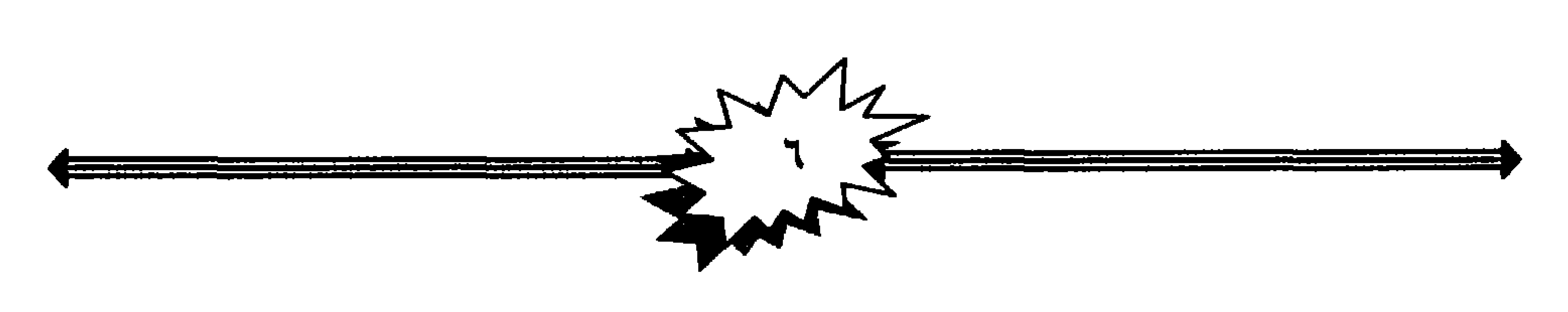
DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net

ISBN 978-9957-24-709-6 ردمك



الفهرس


الفهــــرس





مبرهنات النهاية

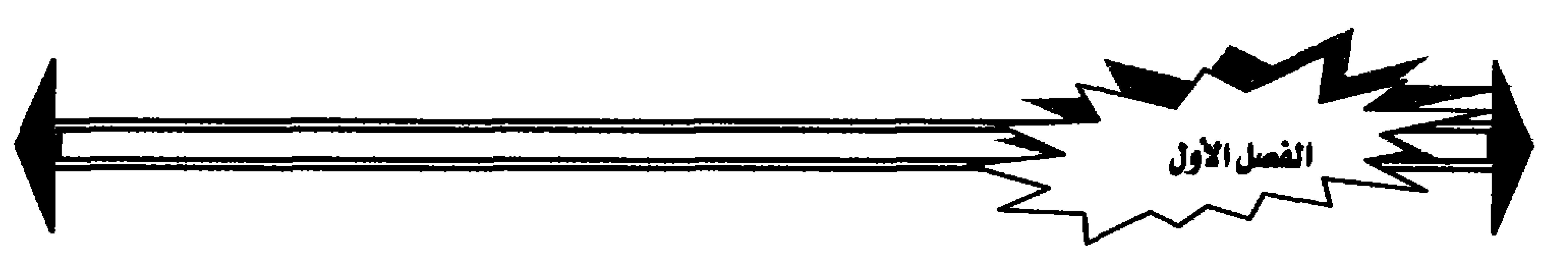
الفصل الأول

مبرهنات النهاية

١.١ مقدمة:

تـدرس نظريـة الاحتمـالات القـوانين الـتي تظهـر عنـد تكـرار التجـارب الاحتمالية مرات عديدة تحت نفس الشروط. وتسمح دراسة مثل هـذه القـوانين بالتنبؤ بنتائج تلك التجارب، وعندما يكون عدد التكرارات كـبيراً بكفايـة، فـإن بعض مميزات المتغيرات والحوادث العشوائية تصبح تقريباً غير عـشوائية، ويقـال عادة في مثل هذه الحالـة أن المميـزات تتمتـع بـصفة الاسـتقرارية (invariant). فمثلاً، التكرار النسبي يتمتع بهذه الصفة، أي إذا كانت شروط التجربـة ثابتـة أو ثابتة تقريباً، فإن التكرار النسبي يتأرجح حول قيمة ثابتة. وبعبارة أخرى، عنـدما تكون $ن \to \infty$، فإن التكرار النـسبي يفقـد صـفة العـشوائية، وكـذلك الوسـط الحسابي لنتائج التكرارات $\bar{س} = \frac{١}{ن} \sum س_ر$ يتمتع أيضاً بصفة الاستقرارية عنـدما تكون ن كبيرة.

يتطلب صنف هام من المسائل في الإحـصاء الرياضـي، تعـيين نهايـة دوال معينة في ن متغير عشوائي، وكذلك نهايـة توزيعاتهـا عنـدما $ن \to \infty$، وبعبـارة أخـرى، إذا كـان $(س_١، س_٢، .... س_ن) = س$ متغير عـشوائي ذو ن بعـد و $\hat{}_{ن}(س)$ دالة ما، التي تعتبر أيضاً متغير عـشوائي، ويطلـب تعـيين نهايـة $\hat{}_{ن}(س)$ ونهاية توزيعها (التوزيع المقارب لها) عندنا $ن \to \infty$. إن مجموعة المبرهنات الـتي



تعطي الحل لمثل هذه المسائل تدعى بمبرهنات النهاية (Limit Theorems). وهذه المبرهنات تصنف إلى نوعين:

١- قانون الأعداد الكبيرة: وهي مجموعة مبرهنات النهاية، التي تعين نهاية متوسط متغيرات عشوائية، عند شروط معينة، وهذه تندرج تحت اسم "قانون الأعداد الكبيرة (Low of Large Numbers)".

٢- مبرهنات النهاية المركزية: وهي مجموعة مبرهنات النهاية التي تعين نهاية توزيعات دوال في متغيرات عشوائية، تحت شروط معينة، وتندرج تحت اسم "مبرهنات النهاية المركزية (Central Limit Theorems)".

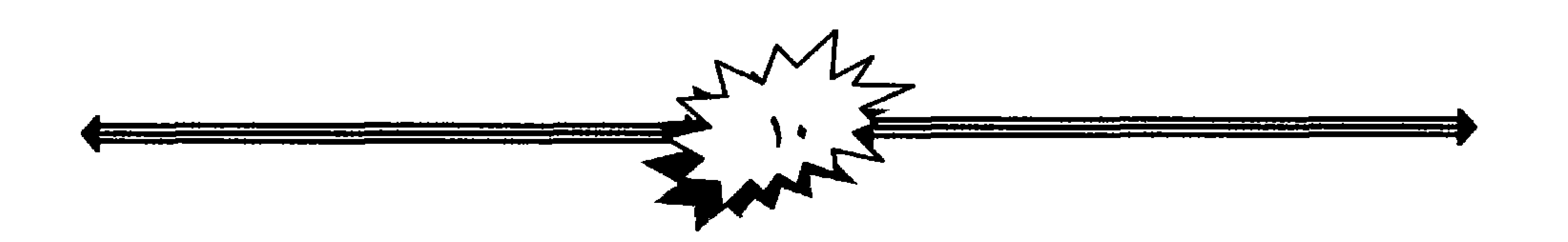
يهدف هذا الفصل إلى تقديم بعض الصيغ الأساسية لقانون الأعداد الكبيرة على هيئة مبرهنات بالإضافة إلى مبرهنات أساسية في النهاية المركزية.

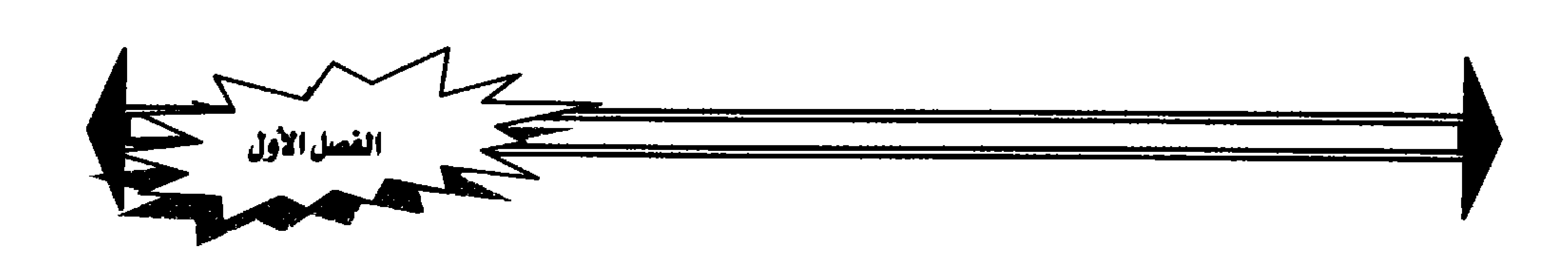
سنتعرض في البداية، وبصورة موجزة لتقارب متتاليات متغيرات عشوائية.

١. ٢ تقارب متتاليات متغيرات عشوائية

Convergence of Sequences of Random Variables

لتكن $س_١$، $س_٢$،....$س_ن$، متتالية متغيرات عشوائية نرمز لها بـ {$س_{(ن)}$}، المعرفة على الفضاء الاحتمالي (Ω، أ، ح). بما أن المتغيرات العشوائية المشكلة لهذه المتتالية عبارة عن دوال في الحوادث الأولية ع ∈ Ω، باختيار $ع_٠$ ∈ Ω نحصل على المتتالية العددية {$س_ن(ع_٠)$}، التي يمكن أن تكون متقاربة أو متباعدة.





تعريف ١.٢.١

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية {سن} إنها متقاربة عند الحادث الأولي ع. ∈ Ω إذا كانت المتتالية العددية {سن (ع.)} متقاربة.

تعريف ١.٢.٢

نقول إن متتالية المتغيرات العشوائية {سن} متقاربة عند الحادث أ ⊂ Ω، إذا كانت هذه المتتالية متقاربة عند كل حادث أولي ع ∈ أ.

تعريف ١.٢.٣

يقال عن متتالية المتغيرات العشوائية {سن} إنها متقاربة من المتغير العشوائي س عند الحادث أ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\text{نها}_{ن \to \infty} \text{س}_ن(\text{ع}) = \text{س}(\text{ع}) \; \forall \; \text{ع} \in \text{أ} \qquad (١.٢.١)$$

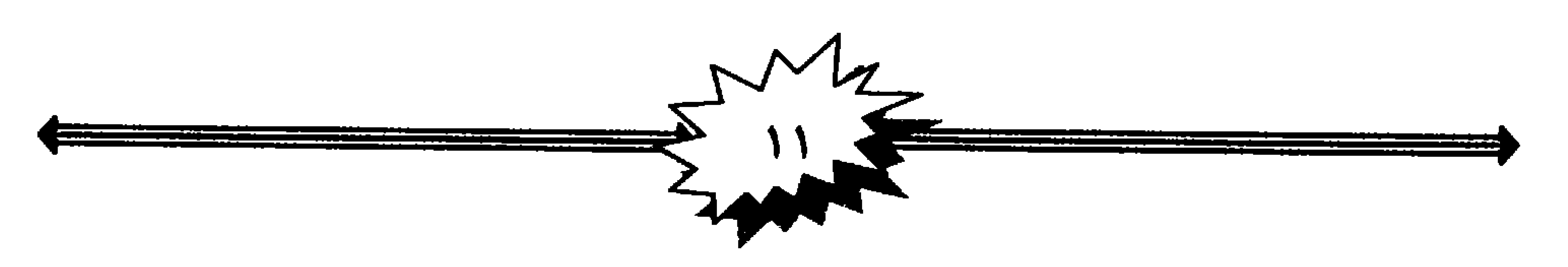
مثال(١.٢.١):

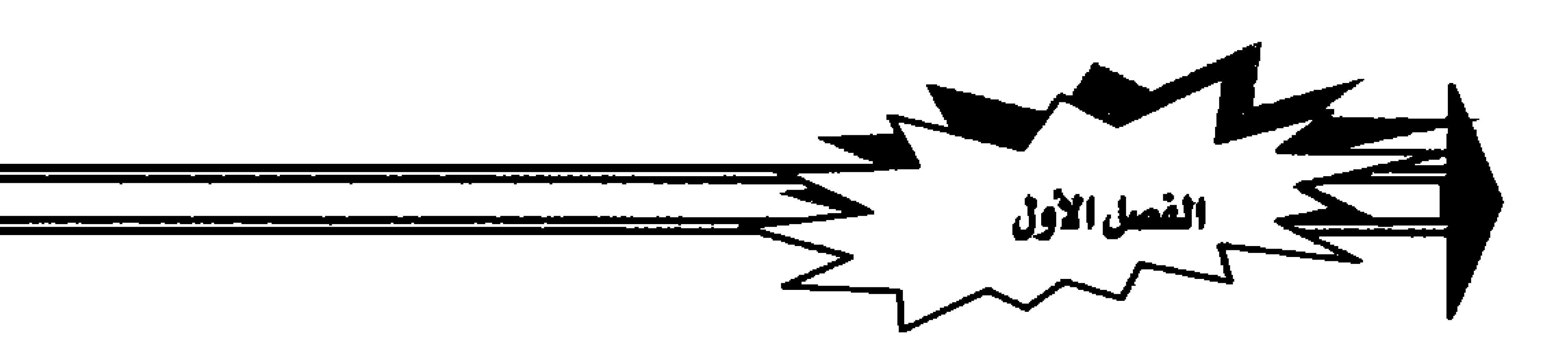
لتكن متتالية المتغيرات العشوائية {سن}، حيث ن = ١، ٢، ...؛ سن (ع) = (ع)ن المعرفة على الفضاء Ω = [-١، ١].

بما أن:

$$\text{س}(\text{ع}) = \text{نها}_{ن \to \infty} \text{س}_ن(\text{ع}) = \text{نها}_{ن \to \infty} (\text{ع})^{ن} = \begin{cases} ١، & \text{ع} = ١ \\ ٠، & ٠ \leq \text{ع} < ١ \end{cases}$$

وغير معرف عندما -١ < ع< ٠، فإن متتالية المتغيرات العشوائية {سن}





تقارب من س =١ عندما ع =١ وتتقارب من س =٠ عند الحادث أ = [٠، ١].

وبصورة خاصة، إذا كان أ = Ω، فيقال بأن متتالية المتغيرات العشوائية {سن} متقاربة من س باحتمال يساوي الواحد أو تتقارب تقارباً شبه أكيد (almost certain co mergence).

تعريف ١.٢.٤:

التقارب شبه الأكيد Almost Certain Convergence

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية {سن} إنها متقاربة من س باحتمال يساوي الواحد (تقارب شبه أكيد)، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(١.٢.٢) \quad ح\left(\left\{ع \in \Omega ز \underset{ن \to \infty}{نها} س_{ن}(ع) = س(ع)\right\}\right) = ١$$

ويرمز لهذا التقارب بـ:

ح (سن ↛ س) = ٠ أو ح (سن ⟵ س) = ١

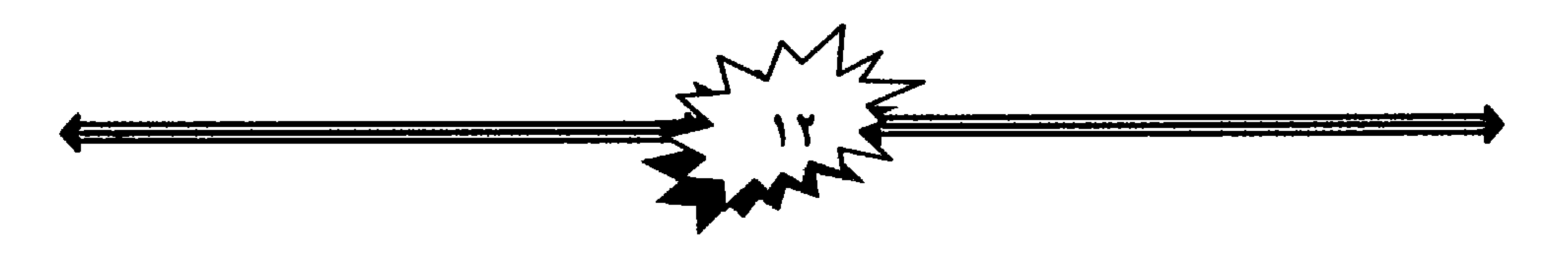
أو في بعض الأدبيات الإحصائية بـ سن $\xrightarrow{\text{تقارب احتمال}}$ س.

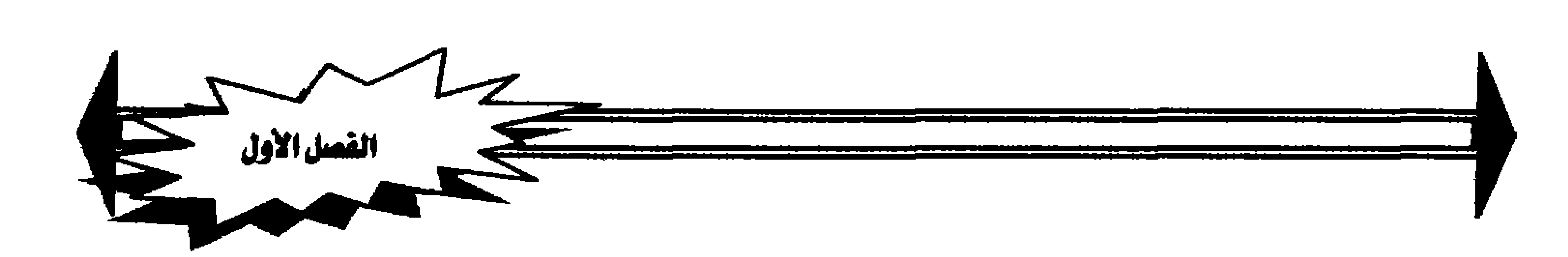
تعريف ١.٢.٥:

التقارب بالاحتمال Convergence in probability

نقول عن متتالية من المتغيرات العشوائية {سن} بأنها متقاربة بالاحتمال من المتغير العشوائي (أو غير العشوائي) س، إذا تحقق الشرط:

$$(١.٢.٣) \quad نها\ ح\left(\left|س_{ن} - س\right| \leq \in\right) = ١ ز \in > ٠$$





ويرمز للتقارب بالاحتمال عادة بـ $س_ن \xrightarrow{\text{تقارب احتمال}} س$.

نلاحظ عندما $س_ن \xrightarrow{\text{تقارب احتمال}} س$ فهذا يعني أن المتتالية $\{س_ن\}$ قد تكون متقاربة من س عندما تقع بعض الحوادث الأولية، وقد تكون غير متقاربة عند وقوع بعض الحوادث الأولية الأخرى المرتبطة بالتجربة نفسها، فتقارب هذه المتتالية إذن هو حادث مرتبط بالتجربة المفروضة، وأن وقوع هذا الحادث يكافئ وقوع جميع الحوادث $\{|س_ن - س| \leq \in\}$ باستثناء عدد قيمته منها وذلك مهما يكن العدد الموجب $\in$.

وبناء على ذلك، وتعريف التقارب في التحليل الرياضي، نجد أن هنالك اختلافاً بين التقارب بالاحتمال والتقارب العادي، ويتمثل هذا الاختلاف بما يلي:

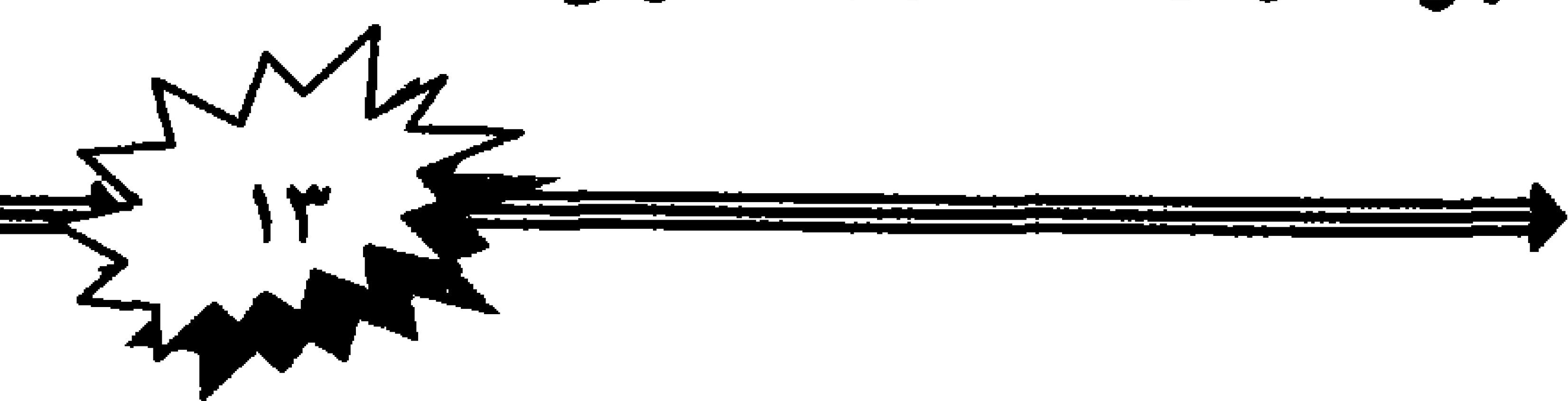
إذا كانت $\{س_ن\}$ متقاربة، بمفهوم التحليل الرياضي، من س عندما ن ← ∞، فهذا يعني بدءاً من قيمة معينة $ن_٠ \in ط$:

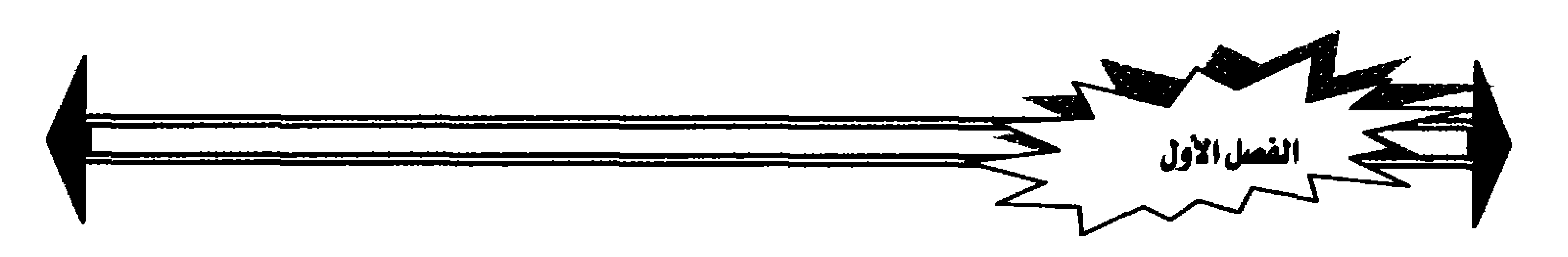
(١ . ٢ . ٤) $|س_ن - س| \leq \in ; ن > ن_٠$

أما إذا كانت المتتالية $\{س_ن\}$ متقاربة الاحتمال من س عندما ن ← ∞، فإنه من أجل بعض القيم لـ ن يمكن أن تكون المتباينة $|س_ن - س| \leq \in$ غير متحققة.

ملاحظة ١.٢.١

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_ن\}$ متقاربة من س باحتمال يساوي الواحد، فهي بالضرورة متقاربة بالاحتمال من س، ويمكن إثبات ذلك بسهولة، ونتركه للقارئ كتمرين.





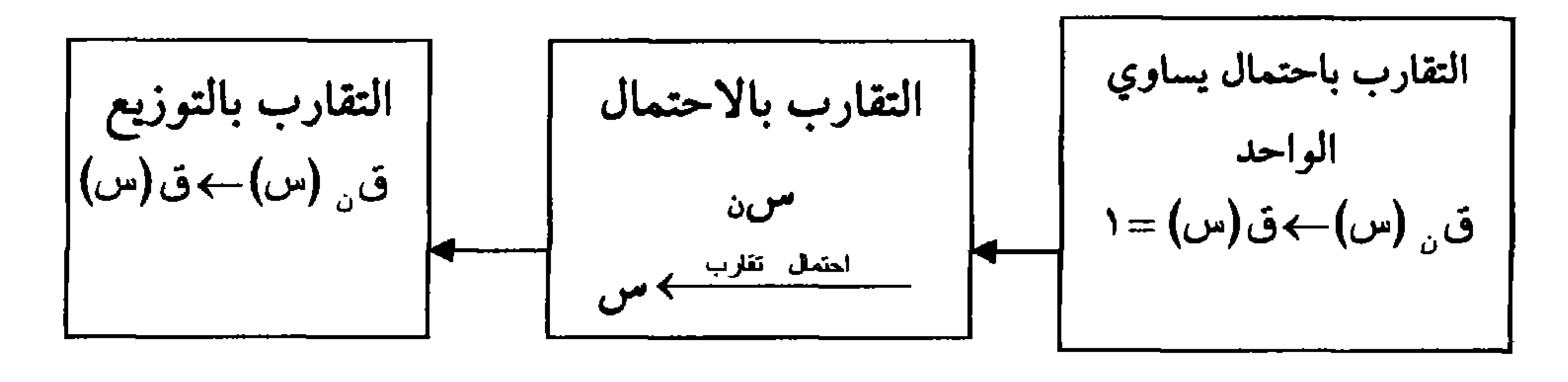
تعريف ١ . ٢ . ٦

نقول عن متتالية دوال توزيع $\{ق_ن(س)=ح(س_ن<س)\}$ إنها متقاربة بـالتوزيع (convergence in distribution) من الدالة ق(س)، إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{ن\to\infty} ق_ن(س) = ق(س) \quad \forall س \in ح$$

حيث إن ق(س) دالة مستمرة عند النقطة س. وكمثال على التقارب بـالتوزيع نـذكر تقارب توزيع ذي الحدين (ن، ح) من التوزيع الطبيعي $(ن ح ، ن ح \bar{ح})$.

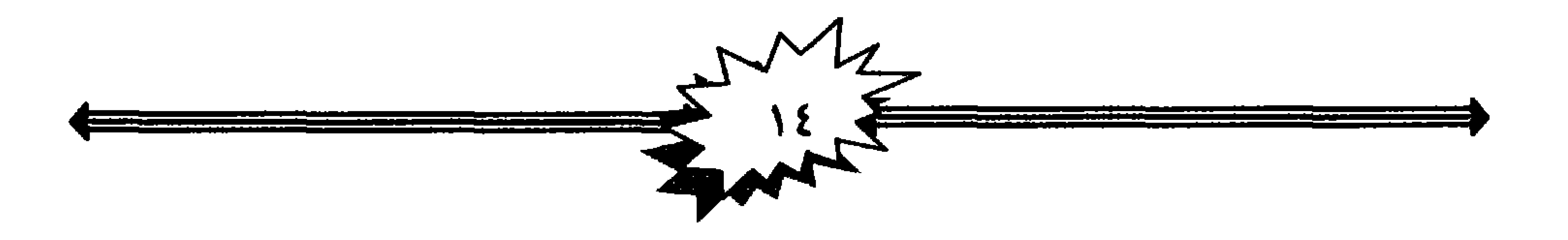
نلاحظ مما سبق أن هناك علاقة بين أنواع التقارب (التقارب بالاحتمال، التقارب باحتمال يساوي الواحد، التقارب بالتوزيع) وهذه العلاقة ممثلة بالشكل (١ . ٢ . ١).

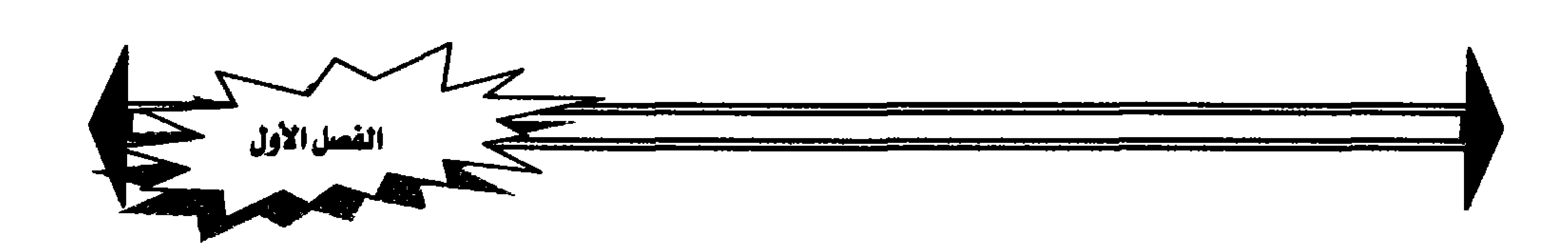


شكل (١ . ١ . ١)

١ . ٣ متباينة تشيبشف TCHEBICHEV INEQUALITY

سنتطرق في هذا البند لمتباينة شهيرة تحلل قيمة تطبيقية محدودة، لكنها ذات قيمة نظرية كبيرة لأنها تستخدم أساساً لإثبات مجموعة من المبرهنات المنتمية لقانون الأعداد الكبيرة. وهذه المتباينة تدعى بـ"متباينة تشيبشف".





برهنة ١.٣.١

إذا كان س متغير عشوائي حقيقي وهو (س) دالة حقيقية غير سالبة، فإن

$$(١.٣.١)\quad \text{ح}\left(\text{هـ}(\text{س}) \le \text{ك}\right) \ge \frac{\text{ت}[\text{هـ}(\text{س})]}{\text{ك}} \text{، ك} > ٠$$

الإثبات:

نفترض أن س متغير عشوائي مستمر دالة كثافته ق(س)، عندئذ:

$$\text{ت}[\text{هـ}(\text{س})] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{هـ}(\text{س})\text{ق}_{\text{س}}(\text{س})\cdot\text{دس} = \int_{\{\text{س}:\text{هـ}(\text{س})\le\text{ك}\}} \text{هـ}(\text{س})\text{ق}_{\text{س}}(\text{س})\cdot\text{دس} + \int_{\{\text{س}:\text{هـ}(\text{س})>\text{ك}\}} \text{هـ}(\text{س})\text{ق}_{\text{س}}(\text{س})\cdot\text{دس} \le$$

$$\int_{\{\text{س}:\text{هـ}(\text{س})\le\text{ك}\}} \text{هـ}(\text{س})\text{ق}_{\text{س}}(\text{س})\cdot\text{دس} \le \int_{\{\text{س}:\text{هـ}(\text{س})\le\text{ك}\}} \text{ك}\text{ق}_{\text{س}}(\text{س})\cdot\text{دس} = \text{ك}\text{ح}(\text{هـ}(\text{س})\le\text{ك})$$

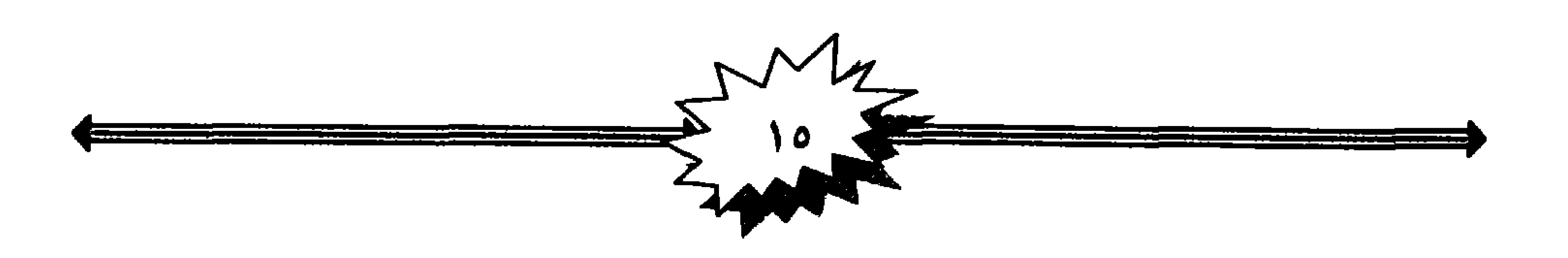
وبالقسمة على ك نجد: $\text{ح}\left(\text{هـ}(\text{س})\le\text{ك}\right) \ge \frac{\text{ت}[\text{هـ}(\text{س})]}{\text{ك}}$ **وهو المطلوب.**

وبشكل مشابه يمكن الإثبات في حالة س متغير عشوائي منقطع، وذلك باستبدال التكامل بالمجموع.

متباينة تشيبيشف:

إذا كان س متغيراً عشوائياً بمتوسط ت(س) = μ، وتباين منتهي لـ س = $\sigma^{٢}$ فإن

$$(١.٣.٢)\quad \text{ح}\left(|\text{س}-\mu|\le\epsilon\right) = \text{ح}\left((\text{س}-\mu)^{٢}\le\epsilon^{٢}\right) \ge \frac{\sigma^{٢}}{\epsilon^{٢}} \text{، } \epsilon > ٠$$





الإثبات:

بوضع $(س-\mu)^{٢} = هـ(س)$ و $ك=\sigma^{٢}$ في العلاقة (١. ٣. ١) نحصل على العلاقة(١. ٣. ٢) بما أن $\Omega_{س} = \{|س-\mu| \geq \in\} \cup \{|س-\mu| < \in\}$

والحادثان $\{|س-\mu| \geq \in\}$ و $\{|س-\mu| < \in\}$ متنافيان، فإن:

$$ح(\Omega_{س}) = ح(\{|س-\mu| \geq \in\}) + ح(\{|س-\mu| < \in\}) = ١$$

ومنه: $$ح(\{|س-\mu| < \in\}) = ١ - ح(\{|س-\mu| \geq \in\}) \geq ١ - \frac{\sigma^{٢}}{\in^{٢}}$$

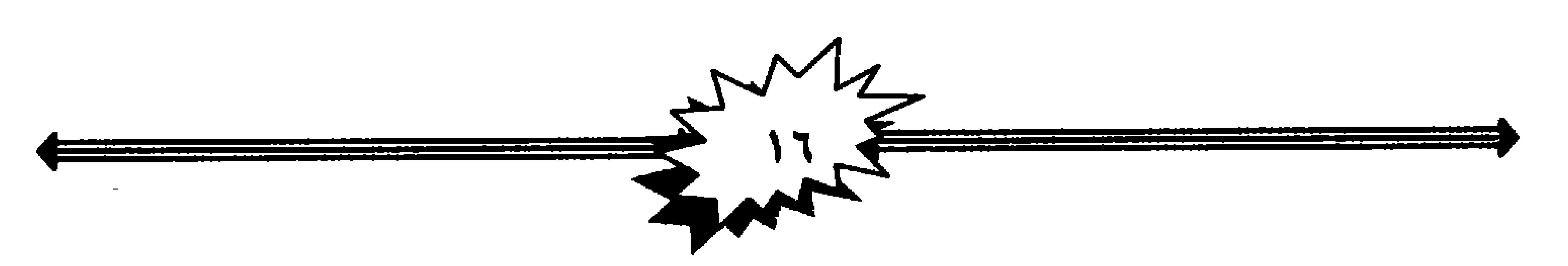
وهي صيغة مكافئة لـ (١. ٣. ٢)، وبوضع $\in =$ ر، حيث ر > صفر في العلاقة (١. ٣. ٣) نجد:

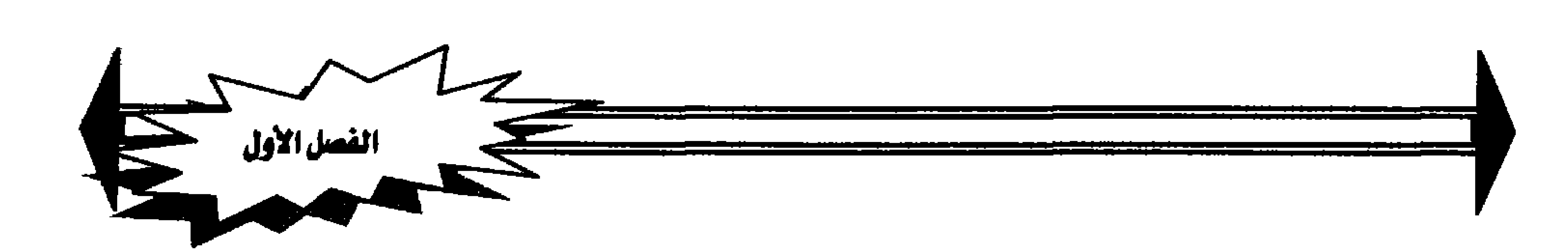
$$ح(\{|س-\mu| < ر\sigma\}) = ح(\mu - ر\sigma < س < \mu + ر\sigma) \geq ١ - \frac{١}{ر^{٢}}$$

أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيماً في الفترة (μ - ر σ، μ + ر σ) لا يقل عن $١ - \frac{١}{ر^{٢}}$، فمثلاً عندما ر$=\frac{١}{٢}$: $ح(\mu - ٢\sigma < س < \mu + ٢\sigma) \geq \frac{٣}{٤}$.

وهذا يعني من أجل متغير عشوائي س، تباينه منتهي، فإن $\frac{٣}{٤}$ قيمه الممكنة على الأقل تقع في إطار انحرافين معياريين عن متوسطه.

هكذا نجد أن متباينة تشيبيشف تطبق على أي متغير عشوائي س شريطة أن يكون تباينه منتهي، ولا نحتاج لمعرفة توزيع س. وهذه المتباينة لا تعطي طريقة عملية لتقدير الاحتمالات، لأن الفرق بين طرفي المتباينة (١. ٣. ٣) عادة تبنى وعندما ر $\geq$ ١ أي($١ - \frac{١}{ر}$)، فإن المتباينة (١. ٣. ٣) لا تفيدنا شيئاً.





مثال (١.٣.١):

لتكن لدينا شحنة كبيرة من بضاعة مصنعة، نسبة العطب فيها ح، ونريد تعيين ن بحيث إذا أخذنا عينة عشوائية ($س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$) حجمها ن أو أكثر من هذه البضاعة كنا واثقين باحتمال لا يقل عن ٠,٩٥ بأن نسبة العطب في العينة يختلف عن ح بأقل من ٠,٠١.

لنرمز بـ ر = ١، ٢، ..... ن؛ $س_ر$ لنتيجة السحب رقم ر عند تشكيل العينة العشوائية، حيث $س_ر$ = صفر إذا كانت الوحدة المسحوبة سليمة، و $س_ر$ = ١ إذا كانت معطوبة، ولتكن $س = \sum_{١}^{ن} س_ر$ عدد الوحدات المعطوبة في العينة العشوائية المؤلفة من ن وحدة، ويصبح المطلوب تعيين ن بحيث:

$$ح\left(\left|\frac{س}{ن} - ح\right| < ٠.٠١\right) \geq ٠.٩٥ ؛ ت(س) = ح$$

$$ح\left(\left|\frac{س}{ن} - ح\right| < ٠.٠١\right) = ح\left(\left|س - ن ح\right| < ٠.٠١ ن\right) \Leftarrow$$

$$ح\left(\left|س - ن ح\right| \geq ٠.٠١ ن\right) \leq ١ - ٠.٩٥ = ٠.٠٥ \text{..................................(١)}$$

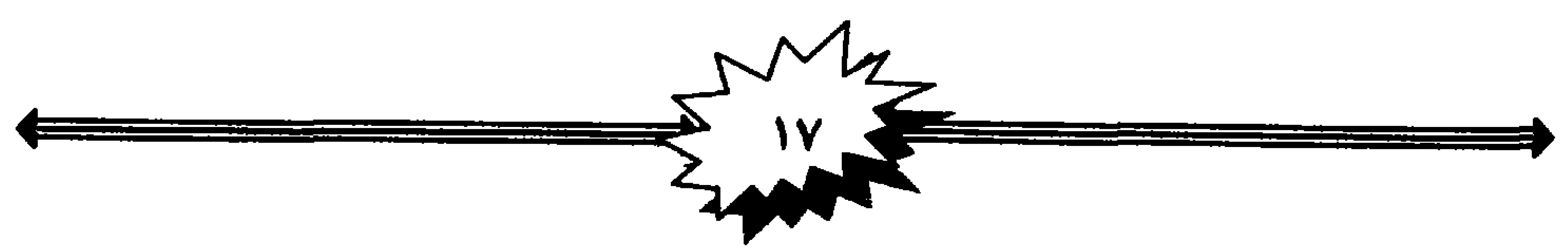
وحسب متباينة تشيبشيف:

$$ح\left(\left|س - ن ح\right| \geq ٠.٠١ ن\right) \leq \frac{تباين س}{(٠.٠١ ن)^٢} = \frac{ن ح \bar{ح}}{(٠.٠١ ن)^٢} \leq \frac{ن/٤}{(٠.٠١ ن)^٢} = \frac{٢٥٠٠}{ن} \text{..................(٢)}$$

لأن $ح \bar{ح} \leq \frac{١}{٤}$، وبمقارنة (١)، (٢) نجد: $\frac{٢٥٠٠}{ن} \leq ٠.٠٥ \Leftarrow ن \geq ٥٠٠٠٠$

مثال(٣.٣.١):

لتكن لدينا تجربة عشوائية، احتمال ظهور الحادث أ يساوي $\frac{١}{٢}$، أثبت أن



عدد مرات ظهور الحادث أ في ١٠٠٠ تكراراً مستقلاً للتجربة المفروضة يقع بين ٤٠٠ و ٦٠٠ باحتمال لا يقل عن ٠,٩٧.

لنرمز بـ س لعدد مرات ظهور الحادث في ن تكراراً مستقلاً للتجربة المفروضة، وبما أن ن = ١٠٠٠، تباين س= $ن ح \bar{ح}$ و ت(س) = ن ح = ٥٠٠، فحسب متباينة تشيبشف:

$$ح\left(\left|س - ت(س)\right| < \in\right) \geq 1 - \frac{\text{تباين س}}{\in^{2}}$$

$$ح\left(\left|س - 500\right| < 100\right) \geq 1 - \frac{250}{(100)^{2}} = 0.975$$ وهو المطلوب.

٤.١ قانون الأعداد الكبيرة الضعيف

The Weak Law of Large Numbers

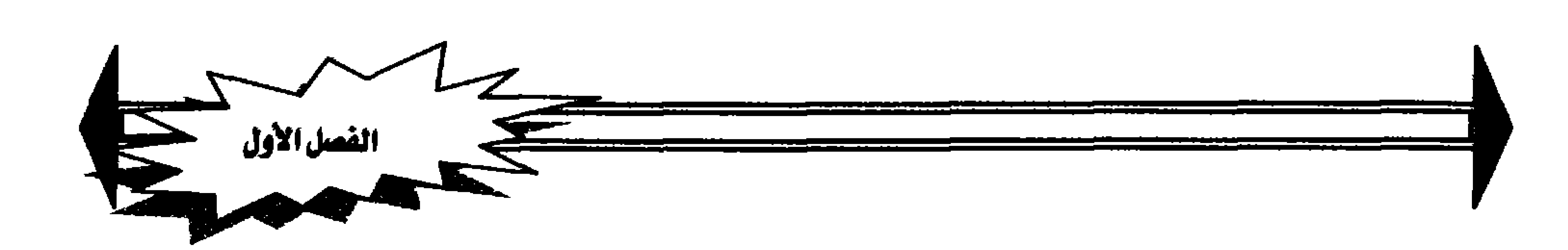
إن مجموعة المفاهيم المتعلقة بالتقارب بالإضافة إلى متباينة تشيبيشف الواردة أعلاه، تمكن من إيضاح محتوى قانون الأعداد الكبيرة.

يصوغ قانون الأعداد الكبيرة العلاقة بين المميزات النظرية والتجريبية للتجارب العشوائية، وهذا القانون له صيغ مختلفة تتجلى بمجموعة من المبرهنات (تشيبيشف، برنولي، بواسون،....).

تعريف ١.٤.١: قانون الأعداد الكبيرة الضعيفة:

نقول عن متتالية من المتغيرات العشوائية {$س_ن$} إنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف إذا حققت الشرط:

$$(1.4.1)\quad \text{نها}\, ح\left(\left|\frac{1}{ن}\sum_{1}^{ن} س_ر - \frac{1}{ن}\sum_{1}^{ن} ت(س_ر)\right| < \in\right) = 1 ؛ \in > 0$$



(١.٤.١) صيغة تشيبيشف لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف:

مبرهنة ١.٤.١: مبرهنة تشيبيشف Tchebichev Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $س_١$، $س_٢$، .... $س_ن$ مستقلة مثنى مثنى، وذات تباينات ر= ١، ٢، ٣، ....، تباين $س_ر = \sigma_ر^٢$ منتهية ومحدودة بعدد ثابت جـ، فإن:

$$\text{(١.٤.٢)} \quad نها ح\left(\left\{\left|\frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر - \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر\right| < \epsilon\right\}\right) = ١ \quad \epsilon > ٠$$

الإثبات:

حسب الفرض، المتغيرات ر = ١، ٢، .... ن، $س_ر$ مستقلة وبالتالي:

$$تباين\left(\frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر\right) = \sum_{ر=١}^{ن}\frac{١}{ن^٢} \quad تباين\ س_ر = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن}\sigma_ر^٢ \le \frac{ن\,ج}{ن^٢} = \frac{ج}{ن}$$

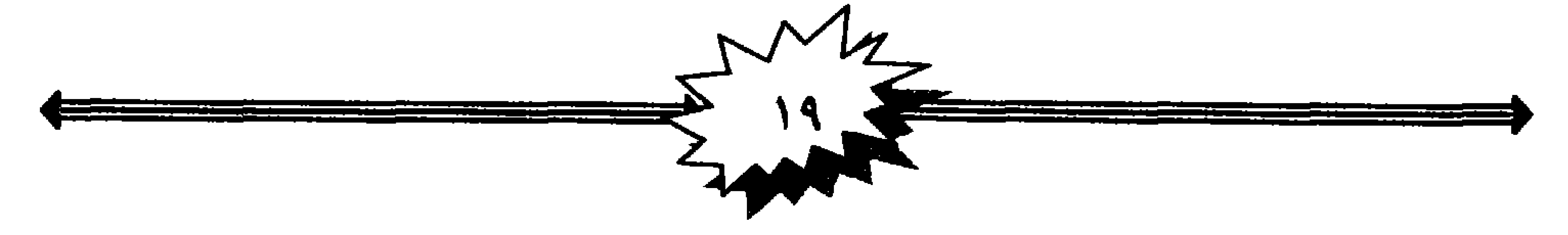
وبناءً على متباينة تشيبشف (العلاقة ١. ٣. ٣)

$$ح\left(\left\{\left|\frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر - \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ت س_ر\right| < \epsilon\right\}\right) \ge ١ - \left[\frac{تباين\left(\frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر\right)}{\epsilon^٢}\right] \ge ١ - \frac{ج}{ن\epsilon^٢}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما ن ⟵ ∞، نجد:

$$\lim_{ن\to\infty} ح\left\{\left|\frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر - \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ت س_ر\right| < \sigma\right\} \ge ١$$

وبما أن الاحتمال لا يمكن أن يتجاوز الواحد، فنحصل على العلاقة المطلوبة.





ونحصل بالانتقال إلى الحادث المعاكس على صيغة أخرى مكافئة (١. ٤. ٢)

$$\text{نها}_{ن\to\infty} ل\left(\left\{\left|\frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} س_ر - \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ت س_ر\right| \geq \epsilon\right\}\right) = 0 \quad \forall\, \epsilon > 0 \qquad (١.٤.٣)$$

نلاحظ أن المتوسط $\bar{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ **عبارة عن متغير عشوائي، بينما** $\frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ت س_ر$ **مقدار ثابت.**

وكحالة خاصة، إذا كان ر =١، ٢، ....، ت س$_ر$= μ، فإن (١. ٤. ٢) تكتب:

$$\text{نها}_{ن\to\infty} ل\left(\left|\frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} س_ر - \mu\right| < \epsilon\right) = 1 \quad \forall\, \epsilon > 0 \qquad (١.٤.٤)$$

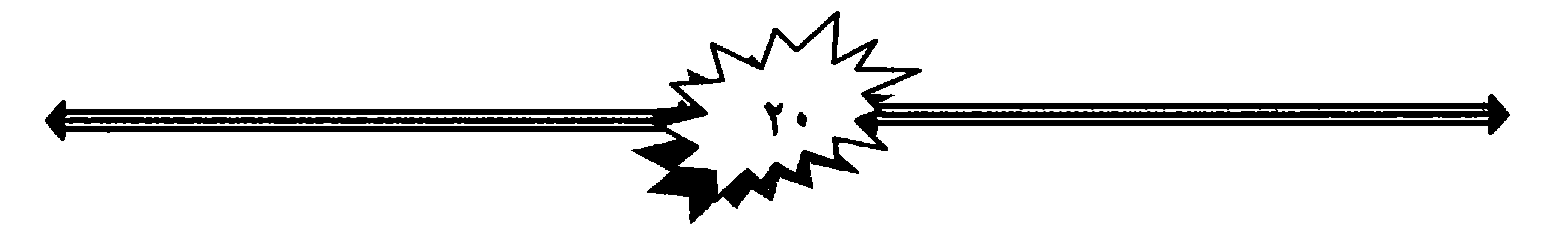
وهي تعطي الأساس لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع، فمثلاً، لنفترض إجراء عملية قياس لمقدار فيزيائي ﻡ، بتكرار عملية القياس ن مرة بشكل مستقل، تحت نفس الشروط، يحصل الملاحظ على النتائج س$_1$، س$_2$،.... س$_ن$ غير المتطابقة تماماً، عندها يؤخذ المتوسط الحسابي للقيم الملاحظة كتقريب لـ ﻡ.

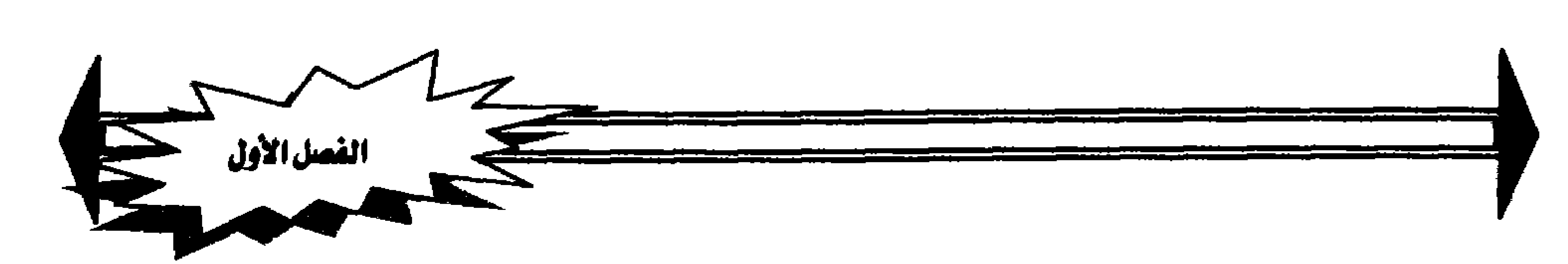
مثال(١.٤.١):

إذا كانت س$_1$، س$_2$،.. س$_ن$ القياسات المستقلة لمقدار فيزيائي ﻡ، وكانت:

$$ع_ن^2 = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - ﻡ)^2$$

هل يمكن اعتبار $ع_ن^2 = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - ﻡ)^2$ **قيمة تقريبية لتباين أخطاء جهاز القياس وليكن** σ^2**؟**





يمكن اعتبار S_n^2 قيمة تقريبية لـ σ^2، إذا كان:

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نها}}\ ح\left(\left|\,ع_{ن}^{2}-\sigma^{2}\,\right|<\epsilon\right)=1\ ،\ \epsilon>0 \quad\text{.................................(1)}$$

بما أن المتغيرات العشوائية س١، س٢،.... سن مستقلة ولها نفس التوزيع (حسب الفرض) فإن المتغيرات العشوائية ر=١، ٢، ....ن، ;صر =(سر -م) ٢ مستقلة ولها توزيع واحد.

$$ت(ص_ر)=ت(س_ر-م)^2=ت(س_ر^2)-2م\,ت(س_ر)+م^2\ ،ر=1،2،......ن$$

$$=\sigma^2+\mu^2-2م\mu+م=\sigma^2+(\mu-م)^2$$

حيث إن: $\mu=ت\,س_ر$

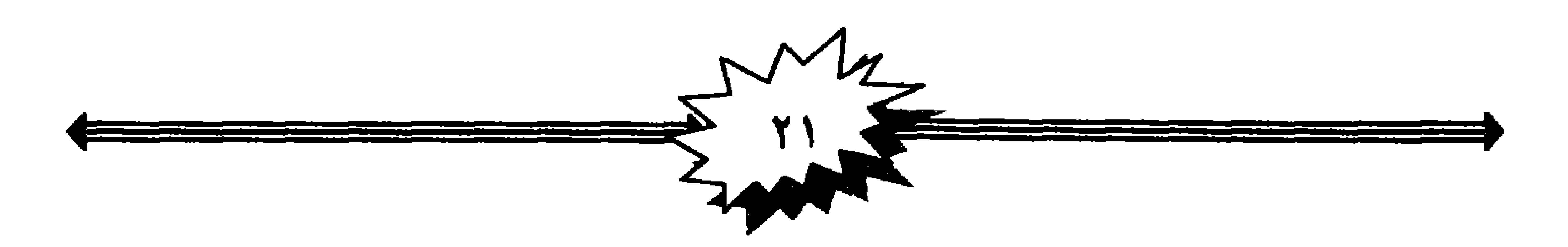
ولكي تحقق المساواة ت(صر)=σ^2 يجب أن يكون μ = م، وهذا يعني عدم وجود أخطاء نظامية، وبالتالي حسب المبرهنة (١. ٤. ٢) فالعلاقة (١) محققة.

تبين مبرهنة تشيبيشف أن المتوسط الحسابي لعدد كبير من المتغيرات العشوائية المستقلة ذات تباينات منتهية ومحدودة بعدد ثابت يفقد صفة العشوائية، أي يقترب بالاحتمال من مقدار ثابت.

(١. ٤. ٢) صيغة برنولي لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة (١. ٤. ٢): مبرهنة برنولي Bernoulli's Theorem

إذا كان س متغيراً عشوائياً يساوي عدد مرات ظهور حادث أ في ن تكراراً





مستقلاً لتجربة عشوائية، و ح احتمال ظهور الحادث أ في كل تكرار، فإن:

$$(1.4.5)\quad \text{نهاح}\left(\left|\frac{\text{س}}{\text{ن}}-\text{ح}\right|<\epsilon\right)=1 \text{ ، } \epsilon>0$$

الإثبات: يمكن اعتبار س متغير عشوائي مؤلف من مجموع ن متغيراً عشوائياً:

$$\text{س}=\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\text{س}_{\text{ر}}$$

حيث $\text{س}_{\text{ر}}$ متغير عشوائي يساوي عدد مرات وقوع الحادث أ في التكرار ر، أي يفترض القيمتين ١، ٠ باحتمال ح و $\bar{\text{ح}}$ = ١ – ح على الترتيب.

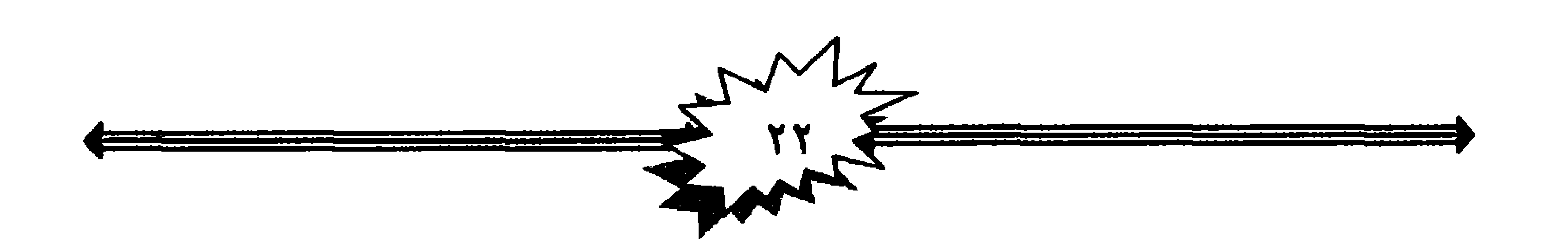
ت ($\text{س}_{\text{ر}}$) = ح، تباين ($\text{س}_{\text{ر}}$) = $\text{ح}\bar{\text{ح}} \leq \frac{1}{4}$، ر = ١، ٢، ....ن.

فبتطبيق مبرهنة (١ . ٤ . ١) نجد:

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهاح}}\left(\left|\frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ن}}^{1}\text{س}_{\text{ر}}-\frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ن}}^{1}\text{ت}(\text{س}_{\text{ر}})\right|<\epsilon\right)=\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهاح}}\left(\left|\frac{\text{س}}{\text{ن}}-\text{ح}\right|<\epsilon\right)=1$$

عندما تكون ن كبيرة بكفاية، فإن التكرار النسبي W (أ) = $\frac{\text{س}}{\text{ن}}$ يكون قريباً جداً من القيمة ح (يفقد صفة العشوائية). وتكمن الأهمية التطبيقية لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف بصيغة برنولي في أنه يعتبر أساس الطريقة الإحصائية لتقدير الاحتمالات.

تجدر الإشارة، إلى أن مبرهنة برنولي أهم صيغة، وأسبق تاريخياً، لقانون الأعداد الكبيرة، وهي تصوغ العلاقة بين التكرار النسبي لوقوع حادث واحتماله. وبرهانها كان صعباً، إلى أن جاء العالم تشيبيشف وقدم الإثبات الوارد أعلاه.



١.٤.٣ صيغة بواسون لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة ١.٤.٣: مبرهنة بواسون Poisson's Theorem

إذا كان في متتالية من التكرارات المستقلة، احتمال وقوع حادث أ في التكرار رقم ر يساوي $\text{ح}_{\text{ر}}$، فإن:

$$(\text{١.٤.٦})\quad \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{ح}\left(\left|\frac{\text{س}}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}\right| < \epsilon\right) = 1;\ \epsilon > 0$$

حيث أن س عدد مرات ظهور الحادث أ في التكرارات الـ ن الأولى.

الإثبات:

لدينا: $\text{س} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}$ ، $\text{ت}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{ح}_{\text{ر}}$ ،$\text{تباين}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{ح}_{\text{ر}}\bar{\text{ح}}_{\text{ر}} \le \frac{1}{4}$

حيث ر = ١، ٢، .... $\text{س}_{\text{ر}}$ عدد مرات ظهور الحادث أ في التكرار رقم ر.

بتطبيق مبرهنة تشيبيشف (١.٤.١) نحصل على المطلوب.

(١.٤.٤) صيغة ماركوف لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة (١.٤.٤) مبرهنة ماركوف Markon's Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{\text{س}_{\text{ن}}\}$، وكان:

$$\lim_{\text{ن}\to\infty} \text{تباين}\left(\frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ن}}^{1} \text{س}_{\text{ر}}\right) = 0$$

فإن: $$(\text{١.٤.٧})\quad \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{ح}\left(\left|\frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ن}}^{1} \text{ت}(\text{س}_{\text{ر}})\right| < \epsilon\right) = 1;\ \epsilon > 0$$

يمكن إثبات صحة هذه المبرهنة بسهولة تطبيق مبرهنة تشيبيشف، وكحالة

خاصة إذا كانت المتغيرات العشوائية $س_{١}$، $س_{٢}$،.... $س_{ن}$ مستقلة مثنى مثنى فإن شرط ماركوف يكتب على الصورة:

$$\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{١}{ن^{٢}} \sum_{ر=١}^{ن} تباين\, س_{ر} \right) = ٠$$

نلاحظ أن مبرهنة تشيبيشف (١. ٤. ١) حالة خاصة من مبرهنة ماركوف.

١. ٥ قانون الأعداد الكبيرة القوي

The Strong Low of Large numbers

رأينا في البند (١. ٤) أن قانون الأعداد الكبيرة الضعيف، تحت شروط معينة، يبين أن متوسط متتالية المتغيرات العشوائية المستقلة تتقارب بالاحتمال من متوسط القيم المتوقعة لها. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن: هل يمكن تقديم عبارة احتمالية حول متتالية المتوسطات.

$\left\{ \overline{س}_{ن} ؛ \overline{س}_{ن} = \frac{١}{ن} \sum_{١}^{ن} س_{ر} ، ن = ١، ٢، .... \right\}$ والجواب يعطى بقانون الأعداد الكبيرة القوي.

تعريف (١. ٥. ١):

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_{ر}\}$ بأنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي إذا كان مهما يكن $\in > ٠$، و $\delta > ٠$، يمكن إيجاد عدد صحيح موجب ن، بحيث يتحقق الشرط:

$$(١. ٥. ١) \quad ح \left(\left| \overline{س}_{ن} - \sum_{١}^{ن} ت(س_{ر}) \right| < \in ؛ ن = ن_{٠}، ن_{٠}+١، ....، ن_{٠}+ك \right) \geq ١ - \delta$$

من أجل كل قيم ن $\geq ن_{٠}$ وكل قيم ك.

متباينة كالماغوروف: Kalmagoron Inequality

إذا كانت $س_1$، $س_2$، ... $س_ن$ متغيرات عشوائية مستقلة وذات تباينات منتهية σ_1^2، σ_2^2، ،،، $\sigma_ن^2$ ولنفترض $\sum_{ر=1}^{ن} \sigma_ر^2 = جـ_ن$ و ر=١،٢،..... ن و ت$(س_ر) = \mu_ر$ فإن:

$$(١ . ٥ . ٢) \quad ح\left(\left| \sum_{ر=1}^{ن} س_ر - \mu_ر \right| < \in \right) \geq ١ - \frac{جـ_ن}{\in^2} ; \in > ٠$$

مبرهنة (١ . ٥ . ١) مبرهنة كالماغوروف Kalmagoron Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_ن\}$ مستقلة مثنى مثنى وتحقق الشرط:

$$(١ . ٥ . ٣) \quad \sum_{ر=1}^{ن} \frac{\sigma_ر^2}{ر^2} < +\infty$$

فإنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي.

وبناءً على ذلك، إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_ن\}$ مستقلة مثنى مثنى وذات تباينات محدودة بعدد ثابت جـ فإنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي.

إحدى النتائج الهامة المتعلقة بقانون الأعداد الكبيرة القوي توصل إليها العالم كالماغوروف وهي:

"إذا كانت $\{س_ن\}$ متتالية مع المتغيرات العشوائية المستقلة مثنى مثنى ولها نفس التوزيع، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تخضع هذه المتتالية لقانون الأعداد الكبيرة القوي يتمثل في وجود القيمة المتوقعة ت $(س_ر) = \mu$".



(١. ٦) مبرهنات النهاية المركزية Central Limit Theorems

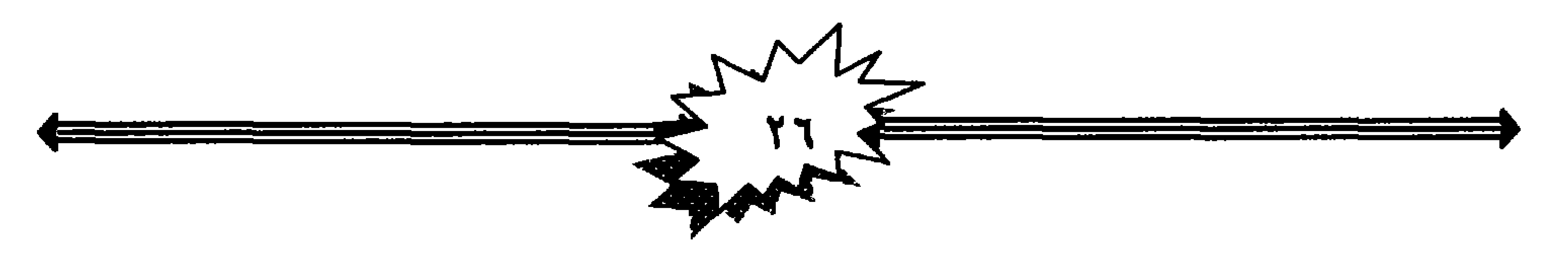
تطرقنا في البندين السابقين لمسائل تقارب بعض المتغيرات العشوائية إلى نهاية معينة، بغض النظر عن توزيعاتها الاحتمالية، ورأينا أن المعرفة المطلوبة للمتغيرات العشوائية موضوع الدراسة لا تتعدى قيمتها المتوقعة وتبايناتها.

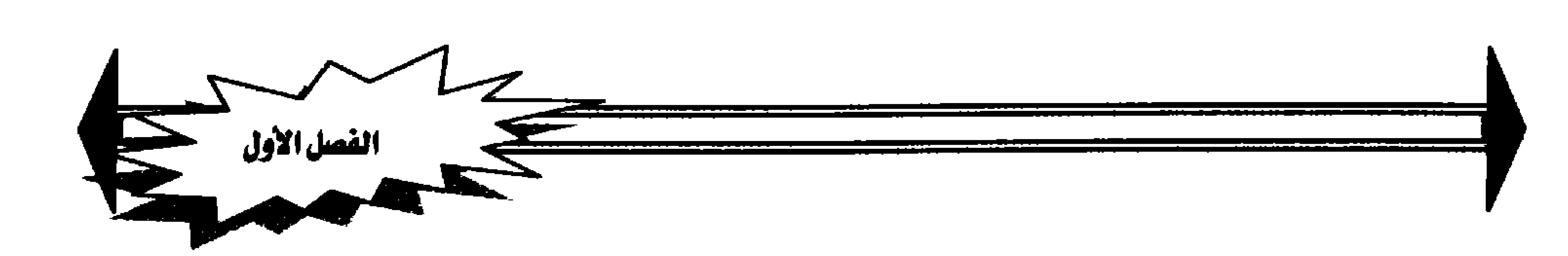
توجد مجموعة أخرى من المبرهنات في نظرية الاحتمالات تخص التوزيع الاحتمالي الذي ينتهي إليه توزيع المتغير العشوائي $ص_ن = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ ، عندما $ن \longrightarrow \infty$.

وهذه المجموعة من المبرهنات هامة جداً في الإحصاء، وتحمل اسماً عاماً "مبرهنات النهاية المركزية" وهي تبين الشروط العامة المفروضة على المتغيرات العشوائية $س_١$، $س_٢$،....$س_ن$ لكي يؤول مجموعها $ص_ن$ إلى التوزيع الطبيعي عندما $ن \longrightarrow \infty$.

لتكن $\{س_ن\}$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، ولنرمز بـ تباين $س_ر = \sigma^٢$، ر=١، ٢ .... وت($س_ر$) = $m_ر$ للقيمة المتوقعة والتباين لـ $س_١$ على الترتيب. وكذلك بـ تباين $ص_ن = \sigma^٢_{ص_ن} = \sum_{ر=١}^{ن} \sigma^٢_ر$ و ت($ص_ن$)= $m_{ص_ن} = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ للقيمة المتوقعة والتباين لـ $ص_ن$. وعندئذ يمكن التعبير عن المحتوى العام لمبرهنات النهاية المركزية بالآتي:

بغض النظر عن توزيعات المتغيرات العشوائية $س_١$، $س_٢$،.... $س_ن$ فإن توزيع مجموعها $ص_ن$ تحت شروط معينة مفروضة على المتغيرات العشوائية $س_ر$، ينتهي إلى التوزيع الطبيعي ($\mu_{ص_ن}$ ، $\sigma^٢_{ص_ن}$) عندما $ن \longrightarrow \infty$.





(١.٦.١) مبرهنة النهاية المركزية بصيغة ليابونوف

Liaponof Central Limit Theorem.

إذا كانت $\{س_ن\}$ رمتتالية من المتغيرات العشوائية تحقق الشروط الآتية:

١. القيم المتوقعة ر=١، ٢،.. ت $(س_ر)=\mu_ر$ موجودة

٢. التباينات ر=١، ٢،.... تباين $(س_ر)= \sigma^٢$ موجودة

٣. العزوم المركزية المطلقة من المرتبة الثالثة $ت\left(|س_ر - \mu_ر|^٣\right)$ موجودة

$$(١.٦.١) \quad \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{\left(\sum_{ر=١}^{ن} ت|س_ر - \mu_ر|^٣\right)}{\left(\sum_{ر=١}^{ن}\sigma_ر^٢\right)^{\frac{٣}{٢}}} = صفر$$

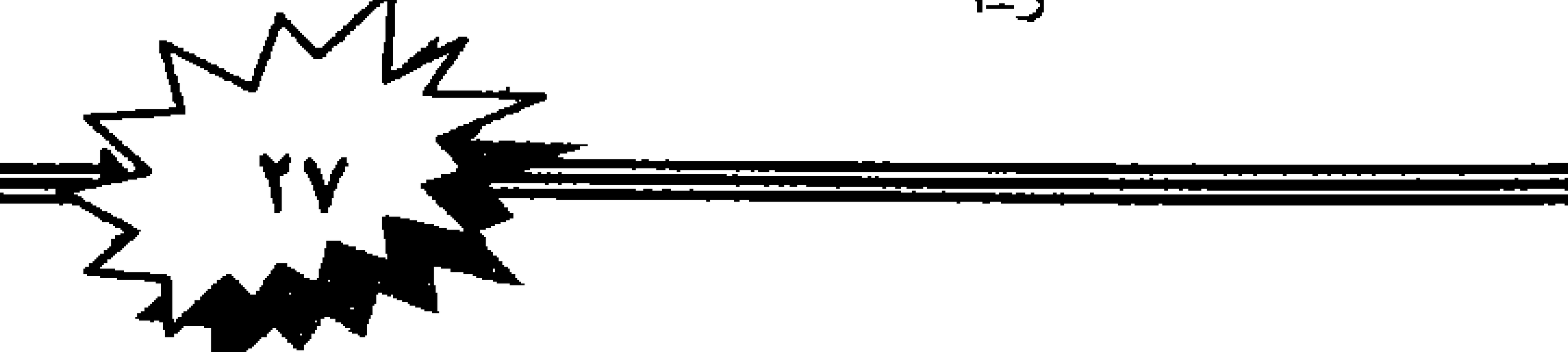
فـإن توزيـع المجمـوع $ص_ن = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ ينتهـي إلى التوزيـع الطبيعـي $(\mu_{ص_ن} ، \sigma^٢_{ص_ن})$.

عندما $ن\to\infty$. وهـذا يعـني عنـدما تكـون ن كـبيرة بكفايـة فـإن التوزيـع التقريبي لـ $ص_ن$ هو التوزيع الطبيعي $(\mu_{ص_ن} ، \sigma^٢_{ص_ن})$.

نلاحظ من شرط ليابونوف (١.٦.١) أن:

$$(١.٦.٢) \quad \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{\sigma_ر^٢}{\sum_{ر=١}^{ن}\sigma_ر^٢} = صفر$$

وهذا يعني أن تبـاين كـل مـتغير عـشوائي $س_ر$ يـدخل في تـشكيل المـتغير العشوائي $ص_ن = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ يمثل نسبة صـغيرة مـن تبـاين $ص_ن$. وبعبـارة أخـرى،





بغض النظر عن اختلاف تباينات المتغيرات العشوائية $س_ر$، فإن هذه التباينات يجب أن لا تختلف عن بعضها بشكل كبير، من حيث تأثيرها على تباين المتغير العشوائي $ص_ن$ وعندئذ يقال: لا يسود في المجموع $ص_ن$ أي متغير من المتغيرات العشوائية $س_ر$.

وإذا رمزنا بـ $Z_ن = \frac{ص_ن - \mu_{ص_ن}}{\sigma_{ص_ن}}$ فإن $Z_ن$ يخضع تقريباً للتوزيع الطبيعي المعياري، عندما تكون كبيرة.

إثبات مبرهنة ليابونوف معقد، ولا مجال لذكره هنا، لذا سنقبل هذه المبرهنة دون إثبات. وسنكتفي بإثباتها في حالة خاصة كافية من أجل معظم القضايا التي نحتاجها، بالإضافة إلى أنها كافية لمعظم التطبيقات الإحصائية.

إذا كانت $\{س_ر\}$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة محققة للشروط الآتية:

١. تخضع لتوزيع احتمالي واحد.

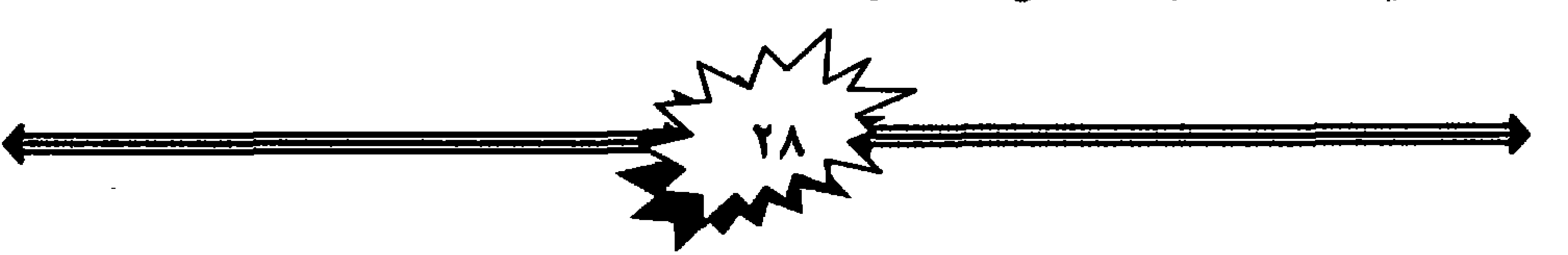
٢. القيم المتوقع ت($س_ر$) = μ، ر= ١، ٢، .... موجودة

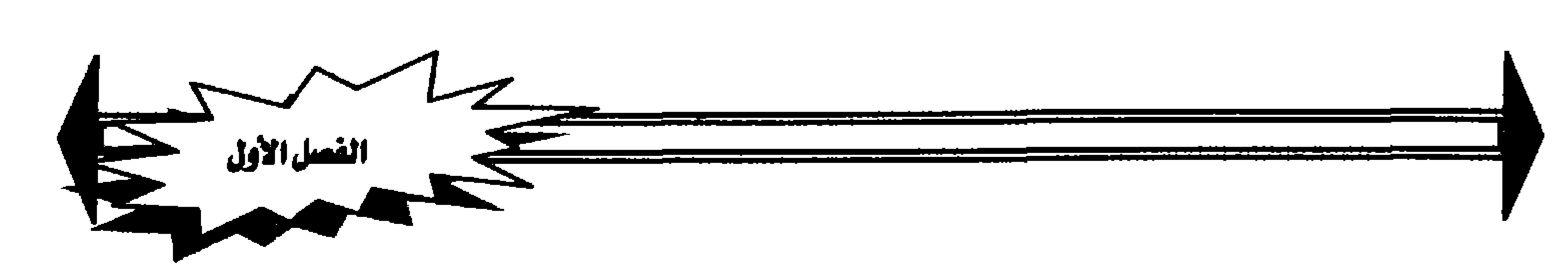
٣. التباينات $س_ر = \sigma^2$، ر=١، ٢،......... موجودة

فإن توزيع المتغير العشوائي: $Z_ن = \frac{ص_ن - ن\mu}{\sigma\sqrt{ن}}$; $ص_ن = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي المعياري (٠، ١) عندما ن$\to\infty$.

الإثبات:

بما أن المتغيرات العشوائية $س_ر$، ر= ١، ٢،.... مستقلة (حسب الفرض) فإن المتغيرات العشوائية ($س_ر - m_ر$)، ر= ١، ٢،....... مستقلة بدورها أيضاً.





لنرمز بـ ر= ١، ٢، ....؛ $\phi_{ر}$(ز) للدالة المميزة للمتغير العشوائي (س$_{ر}$ − m$_{ر}$) و بـ$\phi_{ن}$(ز) للدالة المميزة للمتغير العشوائي Z$_{ن}$، ولتكن ق$_{ن}$(س) دالة توزيع Z$_{ن}$.

بناءً على خواص الدالة المميزة، فإن الدالة المميزة للمتغير العشوائي $\frac{س_{ن} - \mu_{ر}}{\sigma \sqrt{ن}}$ ولنرمز لها بـ $\phi^{*}_{ر}$(ز) حيث:

$$\phi^{*}_{ر}(ز) = \phi_{ر}\left(\frac{ز}{\sigma\sqrt{ن}}\right)؛ ر=١،٢،.....$$

ومن ثم: $$\phi_{ن}(ز) = \left[\phi_{ر}\left(\frac{ز}{\sigma\sqrt{ن}}\right)\right]^{ن}.$$

وحيث إن العزمين المركزيين الأول والثاني هما ٥، و $\sigma^{٢}$ على الترتيب فإن:

$$\phi_{ر}(ز) = ١ - \frac{١}{٢}\sigma^{٢} ز^{٢} + o(ز^{٢})$$

وباستبدال ز بـ $\frac{ز}{\sigma/\sqrt{ن}}$ نجد أن: $\phi_{ر}\left(\frac{ز}{\sigma/\sqrt{ن}}\right) = ١ - \frac{ز^{٢}}{٢ن} + \frac{R(ن،ز)}{ن}$

حيث إن: $\lim_{ن \to \infty}$ و(ن، ز)=٠ وذلك من أجل ز ثابتة، وبالتالي:

$$\phi_{ن}(ز) = \left[١ - \frac{ز^{٢}}{٢ن} + \frac{و(ن،ز)}{ن}\right]^{ن}$$ وبأخذ نهاية الطرفين عندما ن ← ∞

نجد:





$\lim_{n\to\infty}$ ϕ_n (ز)=هـ $^{-\frac{1}{2}ز^2}$ وهذه ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي المعياري (٠، ١) أي أن $\lim_{n\to\infty} ق_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z} هـ^{-\frac{1}{2}Z^2} .دZ = \phi(Z)$

وهذا يعني عندما تكون ن كبيرة فإن:

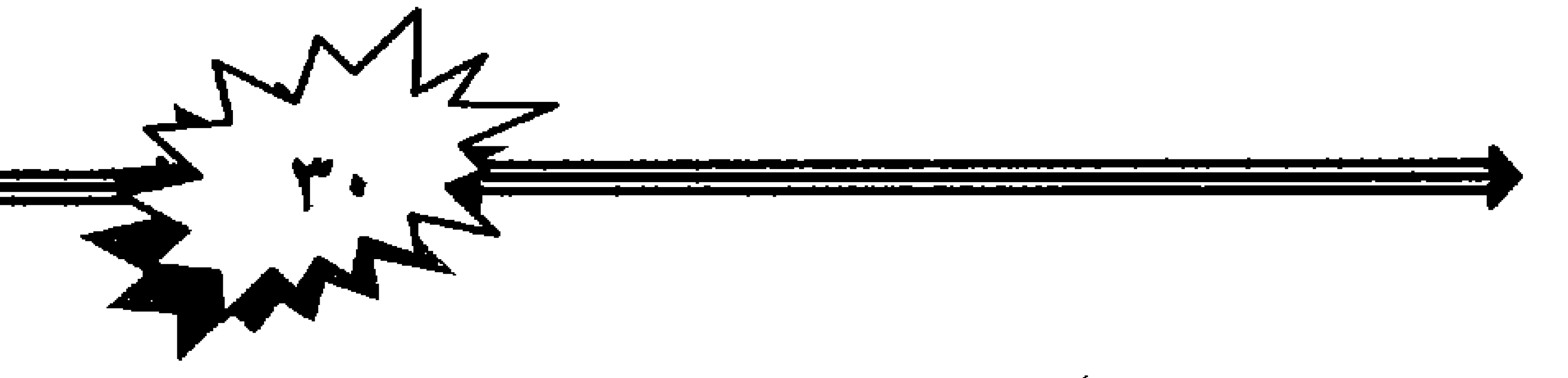
$$ق_n(Z) \approx \Phi(Z) \quad -\infty < Z < +\infty.$$

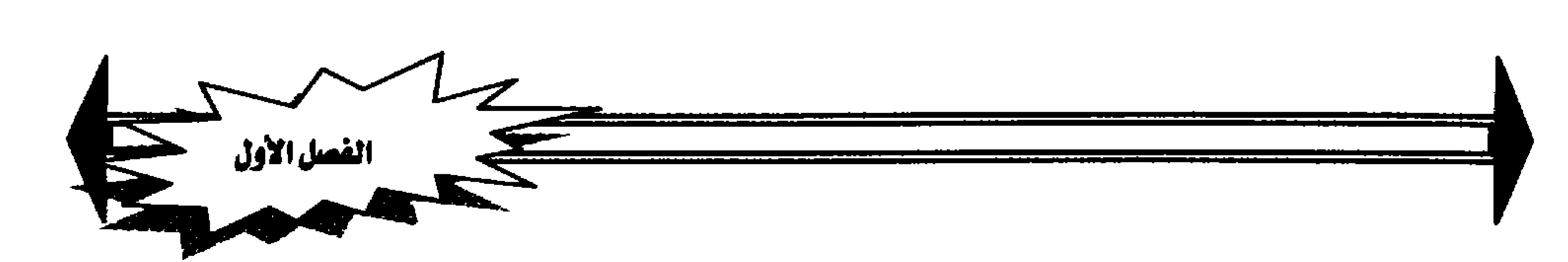
ومن ثم فإن التوزيع التقريبي لـ $ص_n = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ عندما تكون ن كبيرة، هو التوزيع الطبيعي ($ن\mu$، $ن\sigma^2$).

فمثلاً، عند قياس مقدار فيزيائي ما أ، نتائج القياس تمثل متغيراً عشوائياً ع، وتكرار قياس المقدار أ، تحت نفس الشروط، نحصل على متتالية $\{س_n\}$ من المتغيرات العشوائية المستقلة إذا كانت القياسات لا تتضمن أخطاء نظامية، فإن القيمة المتوقعة لـ $س_ر$، ر=١، ٢، ... هي عبارة عن القيمة الحقيقية لقياس المقدار أ، أي أن ت($س_ر$) = أ، وعندئذ تباينات المتغيرات $س_ر$ تصف دقة القياسات، وبما أننا لا نميز بين القياسات (لا نعتبر أي قياس هو الأساس)، فإن شروط مبرهنة النهاية المركزية محققة، لذا فالوسط الحسابي للقياسات المأخوذة للمقدار أ هو متغير عشوائي، وتوزيع يقرب من التوزيع الطبيعي بازدياد عدد القياسات.

(١ . ٦ . ٢) مبرهنة النهاية المركزية بصيغة موافر ولابلاس

أشرنا عند دراسة مبرهنة ليابونوف إلى أن المتغيرات العشوائية $س_ر$، ر= ١، ٢،...ن الداخلة في تشكيل المجموع $ص_n = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ ، تخضع لتوزيع احتمالي واحد، لكن لم نحدد نوع التوزيع (طبيعي، ذي الحدين، بواسون...) أي يمكن أن





تخضع لأي توزيع احتمالي. إذا افترضنا أنها تتبع توزيع برنـولي لمعلمـة ح، فمـا هو التوزيع المقارب للمجموع $ص_ن = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ ، وبعبارة أخرى، ما هـو التوزيـع المقارب لتوزيع ذي الحدين؟

هذا ما تجيب عليه مبرهنة موافر ولابلاس:

مبرهنة موافر ولابلاس Laplace – Moiver Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العـشوائية $\{س_ن\}$ مـستقلة ولكـل منهـا توزيـع بيرنولي (١، ح) فإن توزيع المجموع $ص_ن = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ يتقارب من التوزيـع الطبيعـي (ن ح، ن ح $\bar{ح}$) بازدياد ن أي أن:

$$\lim_{ن \to \infty} \text{توزيع ذو الحدين (ن، ح)} = \text{التوزيع الطبيعي (ن ح، ن ح}\bar{ح}\text{)}.$$

الإثبات:

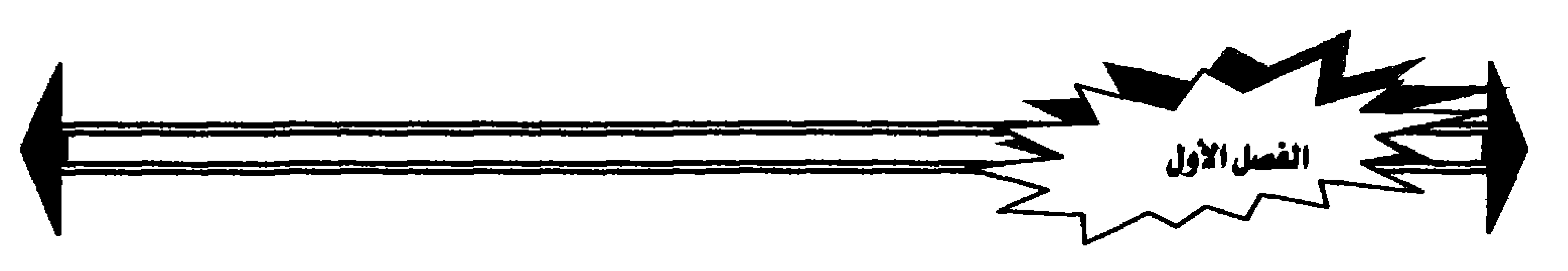
كما نعلم $ح (س_ر = س_ر) = ح^{س_ر} \bar{ح}^{1-س_ر}$ ، $س_ر = 0، 1$ ، $\bar{ح} = 1 - ح$ ، $0 \le ح \le 1$

$$= ت (س_ر) = \sum_{ر=0}^{1} س_ر ح^{س_ر} \bar{ح}^{1-س_ر} = ح$$

تباين $س_ر = ت(س_ر) - (ت (س_ر))^2 = ح\bar{ح} + ح^2 - ح^2 = ح\bar{ح} \le \frac{1}{4}$ ، $ر = 1، 2، ....$

أي أن شروط ليابونوف (في صيغتها المبسطة) محققة، ومن ثم التوزيع $ص_ن = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي (ن ح، ن ح $\bar{ح}$).

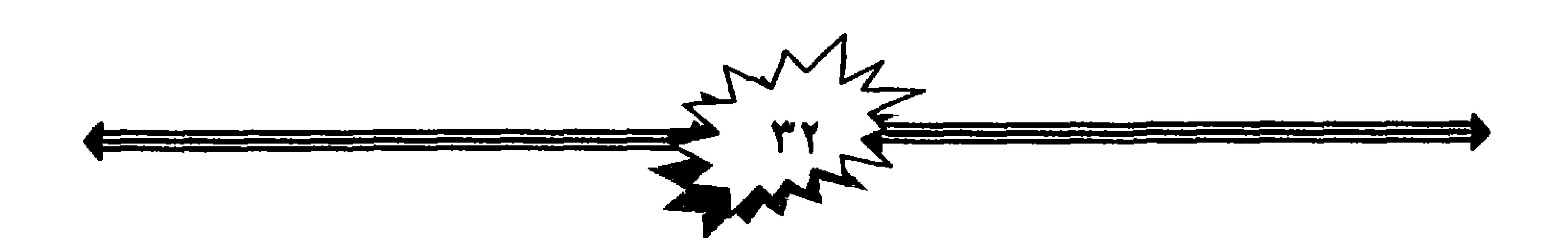




لكن $ص_ن$ يتبع توزيع ذي الحدين (ن، ح) وبالتالي:

$\underset{ن \to \infty}{نها}$ توزيع ذو الحدين (ن، ح) = التوزيع الطبيعي (ن ح، ن ح $\bar{ح}$).

وعندما تكون ن كبيرة فإن: توزيع ذو الحدين (ن، ح) $\approx$ التوزيع الطبيعي (ن ح، ن ح $\bar{ح}$).



تمارين

١. كم مرة يجب رمي قطعة نقود متجانسة حتى يكون ح (٠,٤ < $\frac{m}{ن}$ < ٠,٦) ≥ ٠,٩٠

٢. يرغب باحث علمي تقدير متوسط مجتمع مستخدماً عينة عشوائية حجمها كاف للقول بأن احتمال ألا يتجاوز الفرق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ٢٥٪ من الانحراف المعياري هو ٠,٥٩ فما هو حجم العينة المطلوب؟

٣. س متغير عشوائي توقعه الرياضي ت(س)= ١ وانحرافه المعياري σ= ٠,٢ قدر الحد الأدنى لاحتمالات الحوادث:

أ = { ٠,٥ ≥ س > ١,٥ }　　　ب = { ٠,٧٥ ≥ س ≥ ١,٣٥ }

ج= { س < ٢ }

٤. س متغير عشوائي يساوي عدد الأيام المشمسة من السنة في منطقة معينة. إذا علمت بأن ت(س) = ١٠٠ يوم، و σ = ٢٠، قدر احتمال كل من الحادثين:

أ = { س ≤ ١٥٠ }　　　ب = {س ≤ ٢٠٠ }

٥. كم مرة يجب رمي قطعة نقود متجانسة للحصول على تكرار نسبي لظهور الصورة يقع في المجال [٠,٤ ، ٠,٦] وذلك باحتمال لا يقل عن ٠,٩٧٥؟

٦. في استفتاء للرأي العام حول قضية ما، نريد أن يكون حجم العينة بحيث يكون الاحتمال ١٪ فقط أن نحصل على نسبة تأييد للقضية المطروحة على الاستفتاء أقل من ٥٠٪ في حين أن حقيقة هذه النسبة ٥٢٪، فكم يجب أن يكون حجم العينة؟

٧. هل يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متتالية المتغيرات العشوائية المستقلة مثنى مثنى $س_١$، $س_٢$، .... في كل من الحالات الآتية:

أ) $ح\,(س_ك = \pm ٢^{ك}) = ٢^{-(٢ك + ١)}$ ، $ح\,(س_ك = ٠) = ١ - ٢^{-٢ك}$

ب) $ح\,(س_ك = \pm أك) = \frac{١}{٢ك^{٢}}$ ، $ح\,(س_ك = ٠) = ١ - \frac{١}{ك^{٢}}$

ج) $ح\,(س_ك = \pm ٢^{ك}) = \frac{١}{٢^{ك}}$ ، $ح\,(س_ك = ٠) = ١ - \frac{١}{٢^{٢ك-١}}$

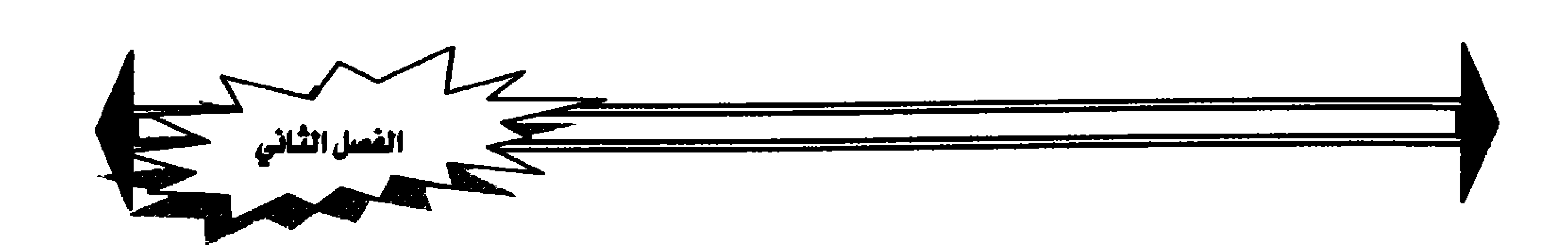
د) $ح\,(س_ك = أ) = \frac{ك}{٢ك+١}$ ، $ح\,(س_ك = -أ) = \frac{ك+١}{٢ك+١}$

٨. في إحدى المدارس الابتدائية، يجب استقبال ٢٠٠ طفل وطفلة في السنة الأولى، أوجد احتمال أن يكون من بينهم ١٠٠ طفلة إذا علمت بأن احتمال ولادة ذكر يساوي ٠,٥١٥.

٩. ليكن لدينا ٦٢٥ تكراراً مستقلاً لتجربة مفروضة، إذا علمت بأن احتمال ظهور الحادث أ في كل تكرار ثابت ويساوي ٠,٨، فأوجد احتمال أن يكون انحراف التكرار النسبي لظهور الحادث أ عن احتماله ثابت، بالقيمة المطلقة لا يزيد عن ٠,٠٦.



المعادلات التفاضلية

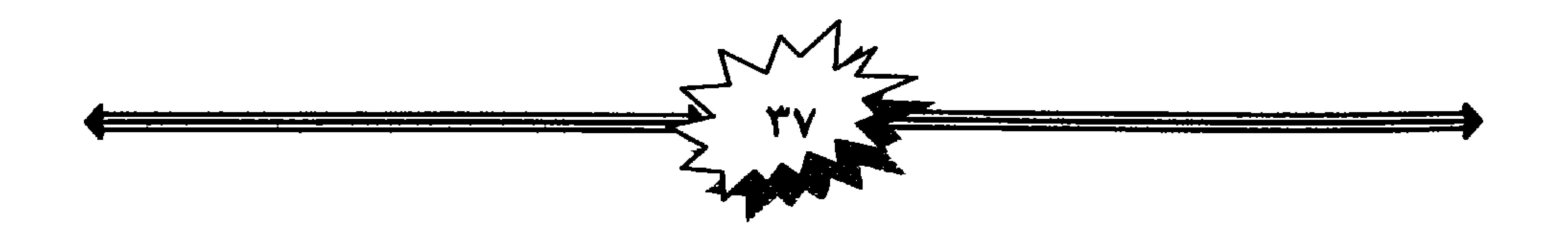


الفصل الثاني

١. ١ المعادلات التفاضلية:

كثير من القوانين في العلوم الفيزيائية، وحديثاً صار كثير من قوانين العلوم البيولوجية والاجتماعية يصاغ بدلالة علاقات رياضية تحتوي على كميات معلومة وأخرى مجهولة، وعلى مشتقاتها التفاضلية مثل هذه العلاقة تسمى معادلات تفاضلية.

وفي البند التالي سنرى كيف تصنف الأنماط المختلفة من المعادلات التفاضلية وفي الفصول التالية سنبحث في طرق حلها، أو حيث يتعذر الحل، في طرق تعطينا معلومات عن الحلول، (إذا وجدت)، الأصناف شتى من المعادلات. وفي هذا البند سنرى كيف تنشأ بعض المعادلات التفاضلية البسيطة ولكن قبل أن نأتي إلى الأسئلة، نؤكد أن المشكلة الكبرى في دراسة المعادلات التفاضلية هي على الغالب تصف موقفاً حقيقياً وصفاً كمياً ويلزم لذلك عادة تبسيط الأمر، بافتراضات يسهل التعبير عنها رياضياً. فمثلاً كي نصف حركة جسم ما في الفضاء. نبدأ أولاً باعتباره كتلة مجتمعة في نقطة وثانياً بفرض أن ليس هناك احتكاك ولا مقاومة هواء. فهذه الافتراضات ليست واقعية، ولكن العلماء يلمحون معلومات قيمة من نماذج معرفة في المثالية، فإذا فهمت هذه المعلومات أمكن بعدئذ تعديل النماذج بأخذ الأمور الأخرى بعين الاعتبار.



المثال(١-١-١-١-): سقطت كرة من أعلى بناء ارتفاعه ١ , ٤٤ متر (المتر= ٢٨ , ٣ قدم) فمتى تصطدم الكرة بالأرض؟

نعتبر أن الكرة نقطة كتلة وأن ليس هنالك مقاومة هواء، فيكون تسارع الكرة هو ما ينشأ عن قوة الجاذبية وحدها. فإذا رمزنا إلى ارتفاع الكرة في أي لحظة ن بالرمز ع(ن) تكون عَ(ن) هي سرعة الكرة في اللحظة ن، لأن السرعة هي معدل تغير الارتفاع بتغير الزمن، وكذلك يكون عً(ن) هو تسارع الكرة إلى أعلى في اللحظة ن، لأن التسارع هو معدل تغير السرعة بتغير الزمن.

ولقد وجدنا بالتجربة أن تسارع الجاذبية جـ يعادل بالتقريب ٩٨٠ سم/ ث^{٢} أي ٩٨٠سم/ ثانية وكل ثانية (= ٢ , ٣٢ قدم/ ث^{٢}) على سطح الأرض.

فتسارع الكرة إذن ثابت. فيكون:

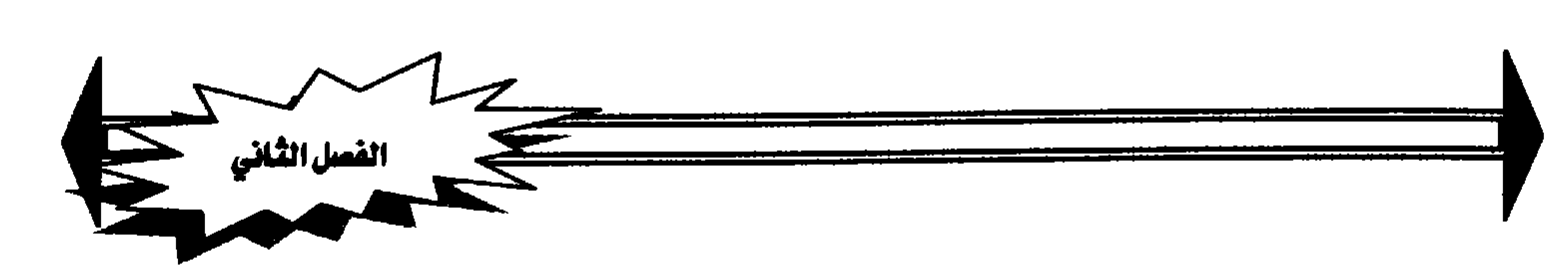
عً (ن) = − ٩٨٠ ....(١-١)

حيث تشير العلاقة السالبة إلى أن قوة الجاذبية تعمل إلى أسفل. ونكامل طرفي المعادلة (١-١) بالنسبة إلى ن فيكون: عَ(ن) = −٩٨٠ ن + ث$_{١}$ ..(١-٢).

حيث ث ثابت يجب تعيينه، ولتعيينه نجعل ن = ٠ في المعادلة (١-٢) فيكون ث$_{١}$= عَ (٠) = ٠ لأن السرعة الابتدائية للكرة صفر إذ أنها سقطت من السكون. ثم نكامل (١-٢) فينتج:

ع(ن)= − ٤٩٠ ن^{٢} + ث$_{٢}$ ....(١ -٣)

والثابت ث$_{٢}$ يمكن أيضاً تعيينه باتخاذ ن=٠ فيكون ث$_{٢}$ =ع(٠) = ٤٤١٠،



وهذا هو الارتفاع البدائي (بالسنتمترات). ولكي نعرف الوقت الذي يمضي قبل أن تصطدم الكرة بالأرض، نجعل الطرف الأيمن في المعادلة (١-٣) صفراً، ثم نجد قيمة ن، فيكون:

$$٤٩٠\ ن^{٢} = ٤٤١٠ \text{ أي أن } ن^{٢} = ٩$$

فيكون ن = ± ٣ ولأن -٣ ليس لها، فيزيائياً، معنى، يكون ن = ٣ ثواني.

المثال(١-١-٢):

ينص قانون نيوتن في التبريد على أن سرعة تغير الفرق في درجتي الحرارة لدى الجسم والوسط الذي يحيط به تتناسب مع هذا الفرق. فليكن Δ(ن) يرمز إلى الفرق بين درجتي الحرارة في اللحظة ن. فلأن سرعة التغيير يعبر عنها رياضياً بمشتقة تفاضلية، يمكن أن نعبر عن قانون التبريد بالصيغة:

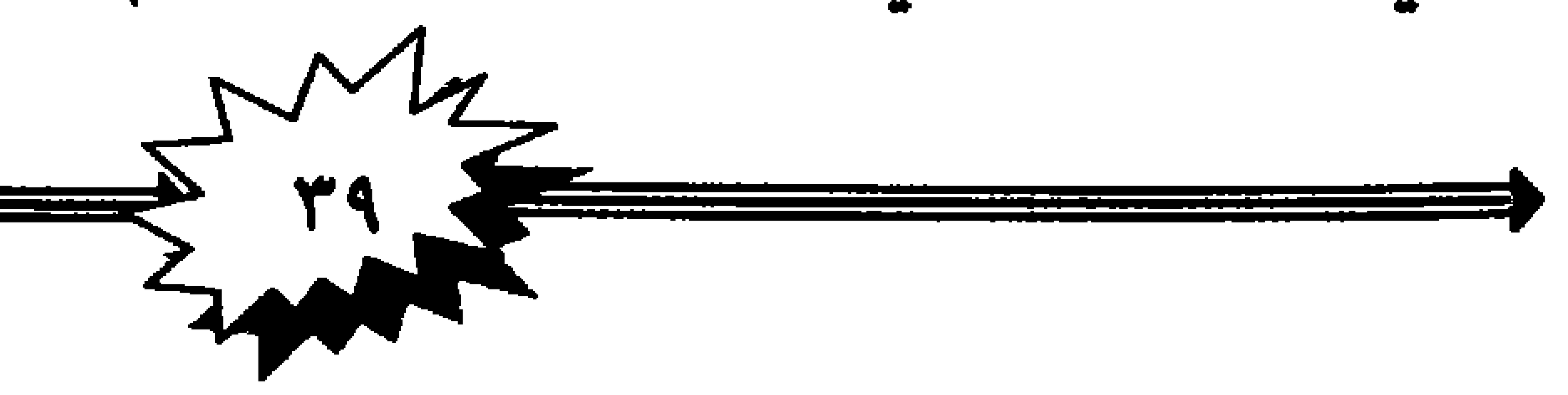
$$\frac{د\Delta}{دن} = ك\Delta ، \quad ....(١-٤)$$

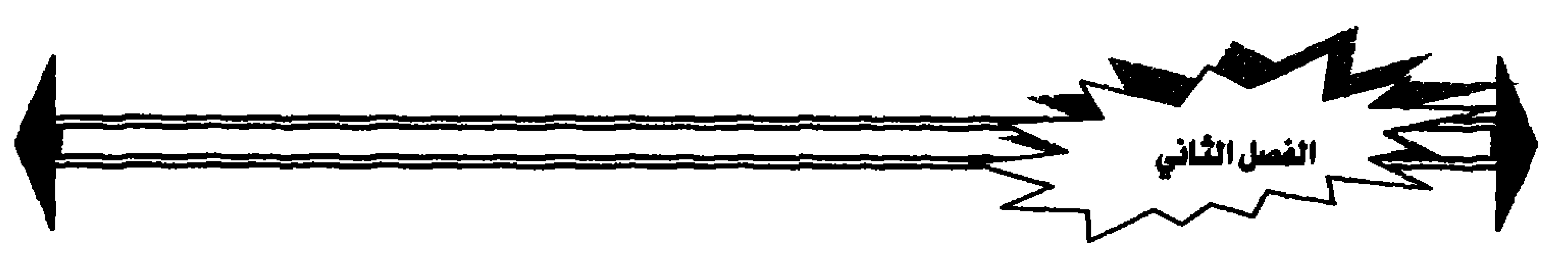
حيث ك هو ثابت التناسب، فإذا تذكرنا من دروس مبادئ التفاضل أن:

$(هـ^{كن})' = ك(هـ^{كن})$، نحصل على الحل:

$$\Delta(ن) = \Delta_{٠}\ هـ^{كن} \quad ....(١-٥)$$

حيث $\Delta_{٠}$ ثابت، وهذا هو حل المعادلة التفاضلية (١-٤). وللتحقق من ذلك تعوض (١-٥) في (١-٤)، ونفاضل فينتج: $(\Delta_{٠}\ هـ^{كن})' = ك\ \Delta_{٠}\ هـ^{ك ن}$ $= ك\ (\Delta_{٠}\ هـ^{كن})$ فإذا جعلنا ن = ٠ في (١-٥)، ينتج أن: $\Delta(٠) = \Delta_{٠}$، أي أن Δ هي الفرق الابتدائي بين درجة حرارة الجسم والوسط المحيط به.





ولأن فرق درجتي الحرارة Δ(ن) يقارب الصفر بمضي الزمن ينبغي أن يكون الثابت ك في المعادلة (١-٥) سالباً.

المثال(١-١-٣):

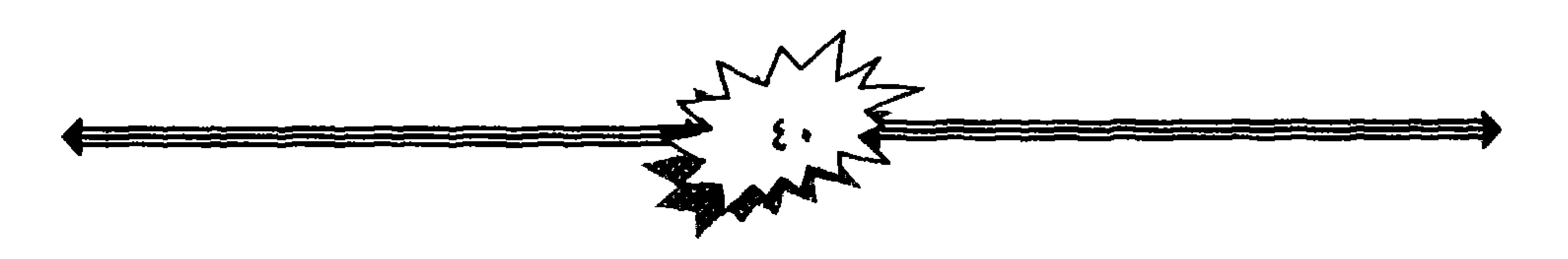
مزرعة بكتيريا تتغير سعتها (أي عدد سكانها) بسرعة تتناسب مع هذا العدد. فإذا كان ع (ن) يرمز إلى عدد السكان في اللحظة ن، فإن المعادلة التي تمثل تزايده هي:

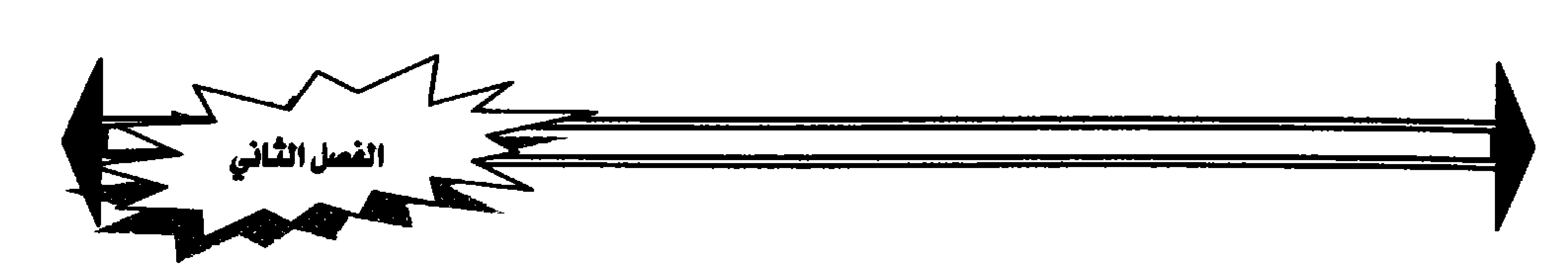
$\frac{دع}{دن} = \alpha ع$، حيث α موجبة أو سالبة حسب كون العدد في تزايد أو في تناقص فكما في المثال السابق، يكون الحل:

ع (ن) = ع (٠)هـ $^{\alpha ن}$، حيث ع(٠) هو عدد السكان ابتداء، فإذا كانت $\alpha >$ ٠ يتزايد العدد أسياً، وإذا كانت $\alpha <$ ٠ يتناقص العدد أسياً أيضاً. وفي الحالة الخاصة $\alpha =$ ٠ تبقى المزرعة ثابتة السعة. مستقرة على ع (٠).

المثال(١-١-٤):

يقاس معدل النمو السكاني بالنسبة للفرد الواحد، بالفرق بين متوسط نسبة المواليد ومتوسط نسبة الوفيات. ولنفرض مجتمعاً فيه متوسط نسبة المواليد ثابت موجب B، ومتوسط نسبة الوفيات يتناسب طردياً مع عدد السكان، وذلك نتيجة للازدحام، وتزايد التنافس على الغذاء، وليكن ثابت هذا التناسب $\delta >$ ٠، فإذا كانت سرعة النمو السكاني $\frac{دع}{دن}$ تكون سرعة هذا النمو بالنسبة إلى الفرد الواحد $\frac{١}{ع}\frac{دع}{دن}$.





فالمعادلة التفاضلية التي تعبر عن النمو السكاني هو:

$$\frac{1}{\text{ع}}\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = B - \delta\,\text{ع}.$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة في ع ينتج أن:

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{ع}\,(B - \delta\,\text{ع})\ldots(1-6).$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة الحركية (Logistic Equation)، والنمو الذي يفضى إليه يسمى النمو الحركي (Logistic growth). وفي المثال ٢-١-٣ سنرى أن الحل:

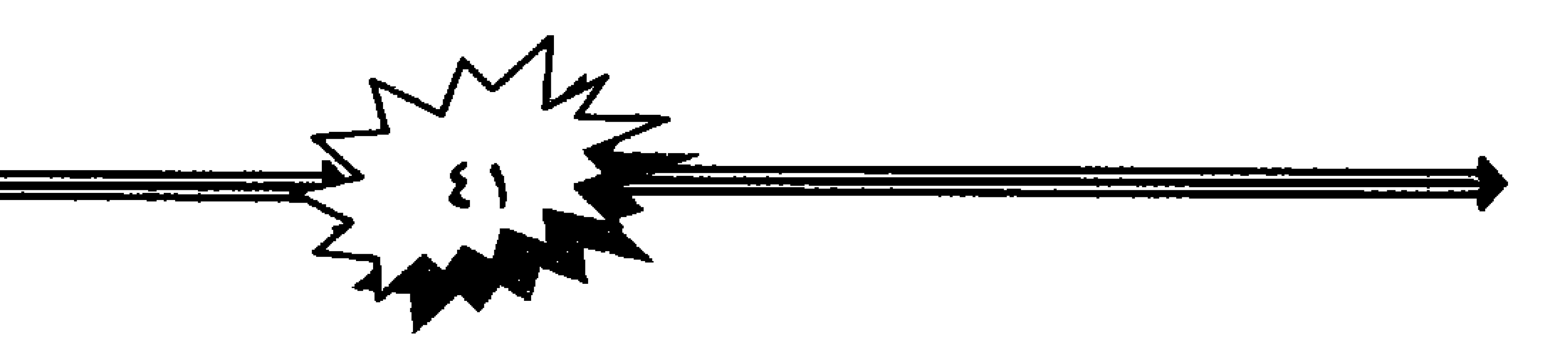
$$\text{ع}\,(\text{ن}) = \frac{B}{\delta + \left[B\,\text{ع}(0)^{-1} - \delta\right]\text{هـ}^{-\beta\text{ن}}}\ldots\ldots\ldots\ldots(1-7)$$

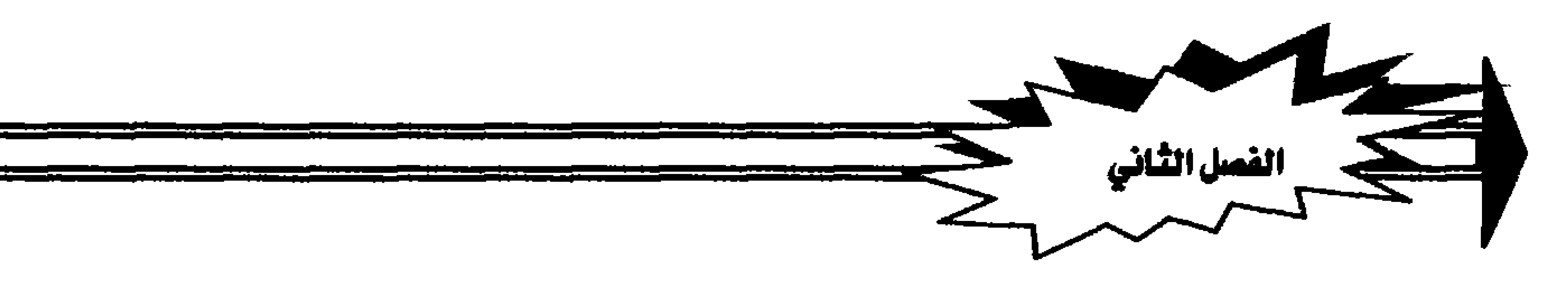
ويلاحظ أنه بتزايد ن يقترب الحد $\text{هـ}^{-\beta\text{ن}}$ من الصفر، لأن $B > 0$، فعدد السكان يقارب حداً لا يتعداه هو B/δ، وذلك أنه إذا صارت ع $= B/\delta$ لنتج من المعادلة (١-٦) أن $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 0$.

المثال (١-١-٥): تحتوي بيئة ما على نوعين من الأحياء:

مفترسات وفرائس، والفرائس لديها صيد من الغذاء لا ينفذ، وليكن ص(ن)، س(ن) يرمزان إلى عدد المفترسات وعدد الفرائس، في هذه البيئة على الترتيب، فلتوافر الغذاء ينتظر أن تكون نسبة المواليد عند الفرائس ثابتة، في حين أن نسبة الوفيات تعتمد طبعاً على عدد المفترسات.

أما نسبة المواليد في المفترسات فتتأثر بكمية الغذاء الميسور لها، وهي غير





مضمونة في حين أن نسبة الوفيات فيها قد تكون ثابتة. فكما في المثال ١-١-٤ نكتب سرعتي النمو للنوعين كما يلي:

$$\frac{1}{س}\frac{دس}{دن}=أ-ب\,ص،\quad \frac{1}{ص}\frac{دص}{دن}=\alpha\,س-B \quad\text{.....................}(١-٨)$$

حيث α، B، أ، ب، ثوابت تناسب موجبة، لاحظ أن المعادلتين تعتمد كل منهما على الأخرى ولهذا السبب نعتبرهما منظومة واحدة. وهما من المرتبة الأولى. ويمكن حذف أحد المتغيرين: نجد قيمة س من المعادلة الثانية فيكون:

$$س=\frac{دص/دن+B\,ص}{\alpha\,ص}\quad\text{.....................}(١-٩)$$

وتفاضل (١-٩) فينتج:

$$\frac{دس}{دن}=\frac{ص\,د^{2}ص/دن^{2}-(دص/دن)^{2}}{\alpha\,ص^{2}}\quad\text{.................}(١-١٠)$$

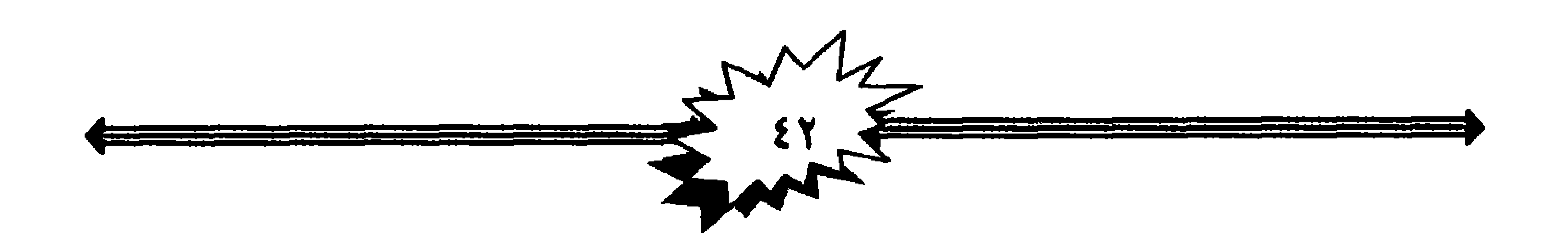
فإذا عوضنا هذا في أولى معادلتي (١-٨)، ينتج بعد التبسيط:

$$ص\frac{د^{2}ص}{دن^{2}}=\left(\frac{دص}{دن}\right)^{2}=ص(أ-ب\,ص)\,(B\,ص+\frac{دص}{دن})\quad\text{...}(١-١١)$$

وليس لدينا حل صريح لمنظومة المفترسات والفرائس، ولكن يمكن أن نستنتج علاقة بين س، ص تكشف عن بعض خصائص الحل. أنظر المثال (٧-١-٤). وسندرس منظومات المعادلات بالتفصيل في الفصل ٧.

التمارين (١-١):

١. حل المعادلات التفاضلية التالية بإيجاد تكامل طرفي المعادلة ثم إيجاد قيمة



ص عند قيمة س المعطاة:

أ) $\frac{د ص}{د س}$ = س + ٣، ص(٠) = ٢

ب) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س}{س^٢ + ٥}$، ص(١) = ٤

ج) $\frac{د ص}{د س}$ = ظا^٢ س ، ص(٠) = ١

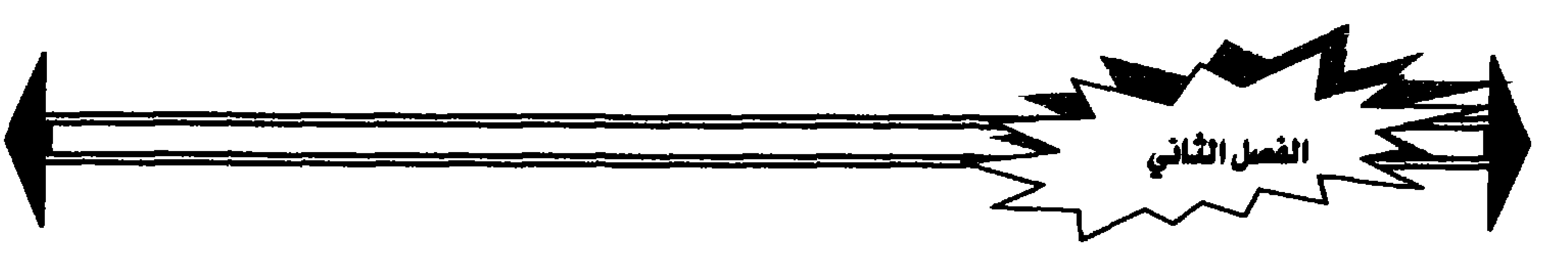
د) $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = س^٢ – ٩، ص(٠) = ١، صَ (٠) = ٣

هـ) $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = جا س – جتا س، ص (π/ ٢) = ٠، صَ (π/ ٢) = ١

٢. سقط جسم في الفراغ بتسارع ثابت مقداره جـ، عبر عن سرعة الجسم بدلالة ارتفاعه.

٣. تأخر متسابق في سباق سيارات فكان عليه أن يقطع $\frac{١}{٢}$ ميل في ٢٠ ثانية فكم يجعل تسارعه؟ وكم القوة التي يبذلها؟ علماً بأن سيارته تزن ٢٠٠٠ باوند؟ [إرشاد: ق = ك ت، و = ك جـ].

٤. يعرف نصف العمر للمادة المشعة بأنه الزمن الذي تستغرق هذه المادة حتى تخسر ٥٠ في المئة من كتلتها. فإذا كانت س (ن) هي كمية المادة المشعة الباقية بعد ن سنوات، وكانت س(٠) = $س_٠$، ونصف العمر ع سنوات، فاكتب معادلة تفاضلية تبين س(ن). متخذاً كل الأمور الجانبية بعين الاعتبار.



٥. أطلق صاروخ من نقطة الابتداء ($س_ر$ ،$ص_ر$) بسرعة ع. وعلى الزاوية θ ($٠ \le \theta \le \pi / ٢$)، أوجد إحداثييه، الأفقي $س_ن$، والرأسي $ص_ن$، بدلالة الزمن. افرض أن ليس هنالك مقاومة هواء وأن قوة الجاذبية ثابتة ج.

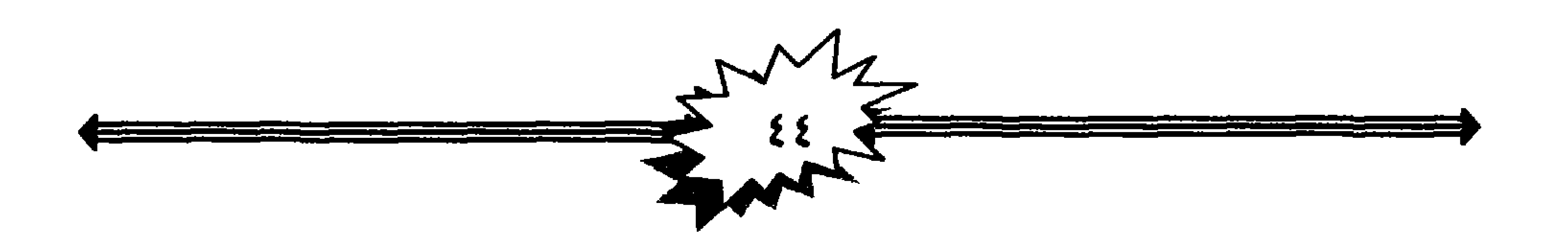
٦. وجد أن مزرعة بكتيريا يتضاعف عدد أفرادها مرة كل ٣ ساعات، فإذا كان هذا العدد في البدء ١٠٠، فمتى يصير ١٠,٠٠٠؟.

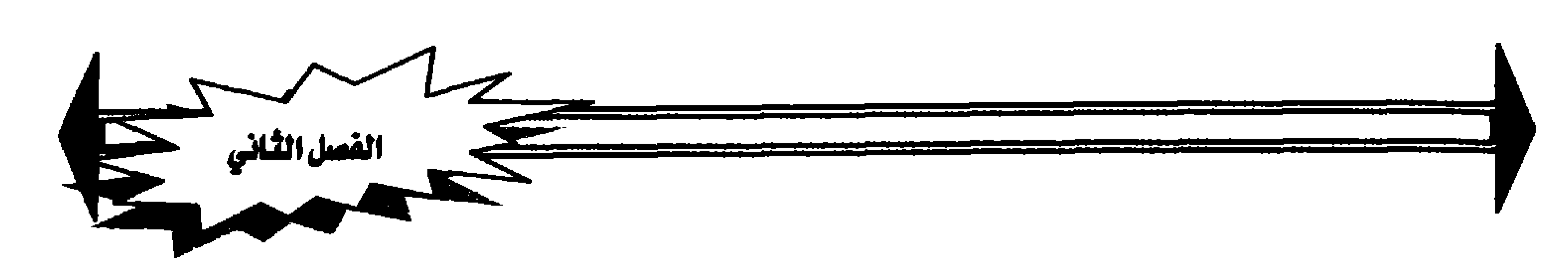
١-٢ تصنيف المعادلات التفاضلية:

يبدو جلياً، من أمثلة البند السابق على الأقل، أن أنواعاً كثيرة من المعادلات التفاضلية تجابهنا في دراستنا للظواهر المألوفة. فمن الضروري إذن، والعاجل، أن ندرس أنواعاً محددة من هذه المعادلات، كلاً على حدة.

وأوضح تصنيف للمعادلات هو الذي يعتمد على طبيعة المشتقات التي تشتمل عليها. فالمعادلة التي تحتوي على مشتقات عادية (مشتقات اقترانات متغير واحد) تسمى معادلة تفاضلية عادية، في حين أن التي تحتوي على مشتقات جزئية تسمى معادلة تفاضلية جزئية. والأمثلة ١-١-١ إلى ١-١-٥ كلها أمثلة على معادلات تفاضلية عادية. ولن نتعرض للمعادلات الجزئية في هذا الكتاب، فمن شاء فليرجع إلى كتابنا المطول.

ولأننا سنقتصر على المعادلات التفاضلية العادية، فسنسقط لفظة العادية، ونتكلم عن المعادلات التفاضلية دون نعت، رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة فيها:





المثال(١-٢-١)إليك أمثلة من المعادلات التفاضلية ورتبها:

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ أ ص (الرتبة الأولى)..............................(١-١٢)

ب) سً (ن) − ٣ سَ (ن) + س (ن) = جتا ن (الرتبة الثانية)...(١-١٣)

ج) $(\text{صَ})^{٩}$ − ٢ ظاص = ٦ $\text{هـ}^{\text{س}}$ (الرتبة الأولى)...............(١-١٤)

د) $(\text{ص}^{(٤)})^{٣/٥}$ − ٢ صً = جتا س (الرتبة الرابعة).............(١-١٥)

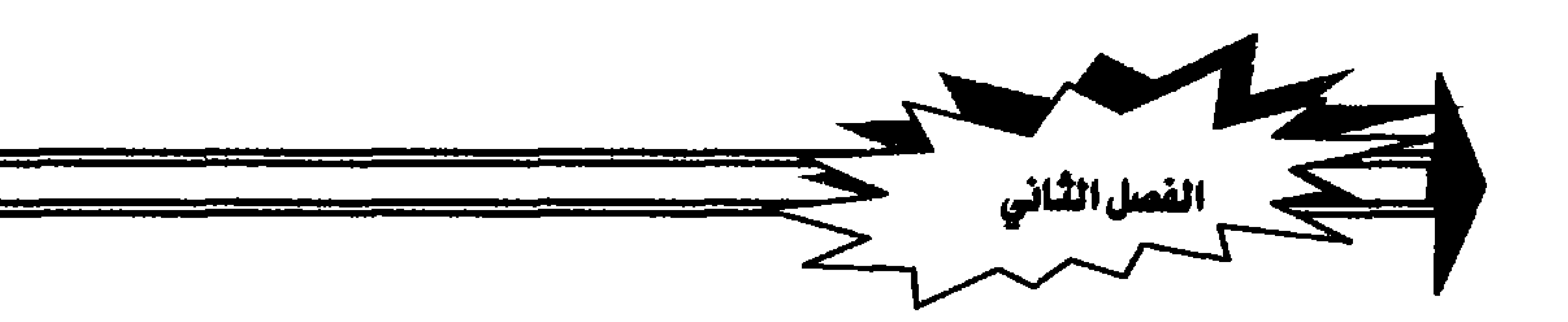
في المثال(١-١-٢)حصلنا على المعادلة التفاضلية:

$\frac{\text{د}\Delta}{\text{د ن}} = \text{ك}\,\Delta$ ، $\Delta(٠) = \Delta_{.}$..................................(١-١٦)

وقد وجدنا حلاً لها هو $\Delta(\text{ن}) = \Delta_{.}\ \text{هـ}^{\text{كن}}$......................(١-١٧)

فهذا الحل (وسنرى فيما بعد أنه الحل الوحيد) يعتمد على القيمة الابتدائية للاقتران المجهول Δ(ن). فالمسائل التي من هذا النوع تسمى مسائل قيم ابتدائية. وبوجه عام إن مسألة القيمة الابتدائية هي معادلة تفاضلية تعين فيها قيم الاقتران وبعض مشتقاته عند نقطة ما تسمى نقطة الابتداء، فتعيين العدد الابتدائي س(٠)، ص (٠) في المثال ١-١-٥ يجعل منظومة المعادلات التفاضلية مسألة قيمة ابتدائية. لاحظ أننا باستعمال هاتين القيمتين في المعادلة الثانية في (١-٨) استطعنا أن نجد قيمة صَ(٠). وقيمتا ص(٠)، صَ(٠) بالإضافة إلى المعادلة (١-١١) تكون مسألة قيمة ابتدائية من الرتبة الثانية.

ونعرّف حل مسألة القيمة الابتدائية ذات الرتبة ن بأنه اقتران قابل للمفاضلة ن مرات، وتحقيق المعادلة التفاضلية المعطاة والشروط الابتدائية المعطاة.



وفي الملحق ٥ سنثبت أنه في كثير من المسائل، هنالك حل وحيد للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة ن إذا أعطي قيمة الاقتران المجهول وقيم كل مشتقاته حتى (ن-١) عند نقطة معطاة.

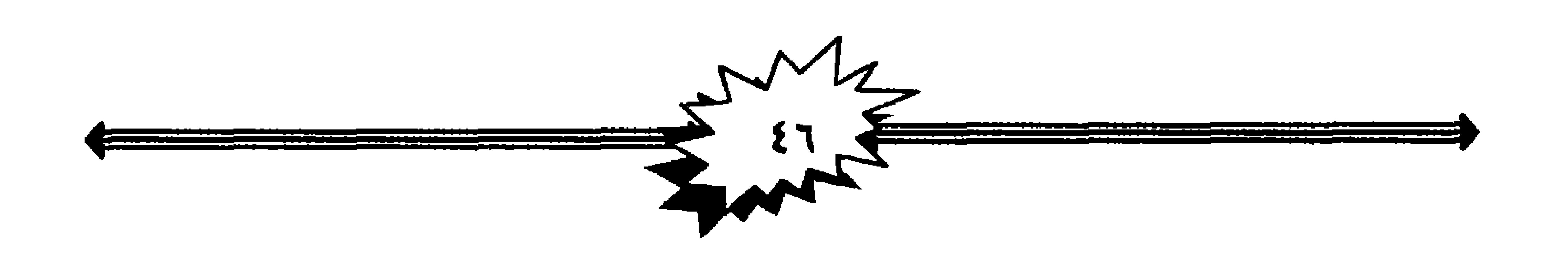
ومن ناحية أخرى، قد لا نعرف عدد الفرائس، ولكن نعرف معلومات مناسبة عن عدد المفترسات، عند نقطتين من الزمن ص(٠) وص(أ). فهاتان القيمتان مع المعادلة (١-١١) تكون مسألة قيم حاصرة. ولكي تكون المعادلة التفاضلية مع قيم للاقتران ومشتقاته مسألة قيم حاصرة، كل ما يلزم هو أن تعطى القيم عند نقطتين مختلفتين على الأقل، ولن نناقش مسائل القيم الحاصرة هنا. ولكن يجدها القارئ في كتابنا المطول.

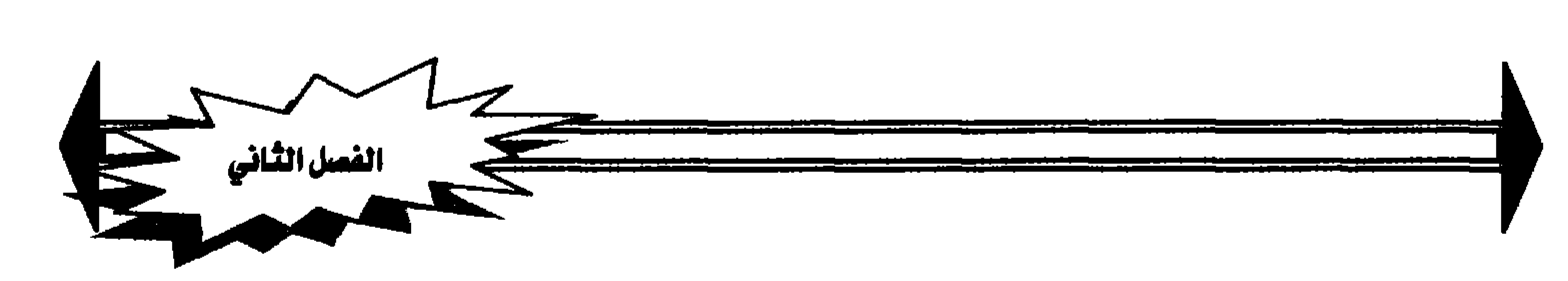
والأمثلة الفيزيائية التي أوردناها في البند السابق نعرف أن لكل منها حلاً في الطبيعة. ولكن هنالك خطر اللبس بين الحقيقة الفيزيائية وبين القالب الرياضي المتمثل بالمعادلة التفاضلية التي نعرفها لتمثل المسألة الحقيقية. فقد يحدث أن يخطئ التفكير فتتم معادلة لا تمت إلى الحقيقة بصلة، وعندها قد لا يوجد للمعادلات حلول. ولنذكر أيضاً أن ليست كل المعادلات التفاضلية ذات حلول. فمثلاً المعادلة:

$$\left(\frac{\text{دص}}{\text{د س}}\right)^{٢} + ٣ = ٠ \quad \text{.................................} (١-١٨)$$

ليس لها حلول ذات قيم حقيقية لأن د ص/ د س تخيلية، والمعادلة:

$$\left(\frac{\text{دص}}{\text{د س}}\right)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٠ \quad \text{.................................} (١-١٩)$$





حلها الوحيد صفر، في حين أن المعادلة $\frac{د ص}{د س}$ + ص = ٠ ......(١-٢٠)

لها مجموعة لا متناهية من الحلول هي ص= جـ $هـ^{-س}$ لكل قيم الثابت جـ.

التمارين(١-٢):

١. اذكر رتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

أ) صَ + أ ص = $جا^{٢}$س

ب) $\left(\frac{د^{٢} س}{د ن^{٢}}\right)^{٣}$ - ٣س $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ جتا ن

ج) ش‴(ن) – شً(ن) = ٠

د) $د^{٥}$ص / د $س^{٥}$ = ٠

هـ) صً + ص = ٠

و) $\left(\frac{د س}{د ن}\right)^{٣}$ = $س^{٥}$

ح) سَ – $س^{٢}$ = ٣س‴

٢. ميز بين كل واحدة من المعادلات التفاضلية التالية: أسئلة قيم ابتدائية أم قيم حاصرة هي:

أ) ص‴ + $W^{٢}$ص = ٠، ص(٠) = ٠، ص(١) = ١

ب) صً + $W^{٢}$ص = ٠، ص(١) = ٠، صَ (٠) = ١

ج) صً + $W^{٢}$ص = ٠، ص(٠) = ٠، صَ (١) = ١

د) $\left(\frac{د س}{د ن}\right)^{٣}$ – ٤ $س^{٢}$ = جان، س(٠) = ٣



هـ) ص‴ + ٢ص″ − (ص′)^{٢} + هـ^{ص} = جاس، ص(٠) = ٠، ص′(٠)=٣، ص″(٠)=٥

و) ص‴ + ٣ ص″ − (ص′)^{٢} + هـ^{ص} = جاس، ص(٠) = ٠، ص(١)=٠، ص′(٠)=٢

٣. بين أن الاقتران أو الاقترانات التي ترافق كلاً من المعادلات التفاضلية التالية هي حلول لها:

أ) ص″ + ص = ٠، ص$_{١}$ = ٢جاس، ص$_{٢}$ = −٥جتاس.

ب) ص‴ − ص″ + ص′ − ص = س، ص$_{١}$ = هـ^{س}− س−١؛
ص$_{٢}$=٣جتاس − س−١؛ ص$_{٣}$=جتاس + جاس + هـ^{س} − س −١

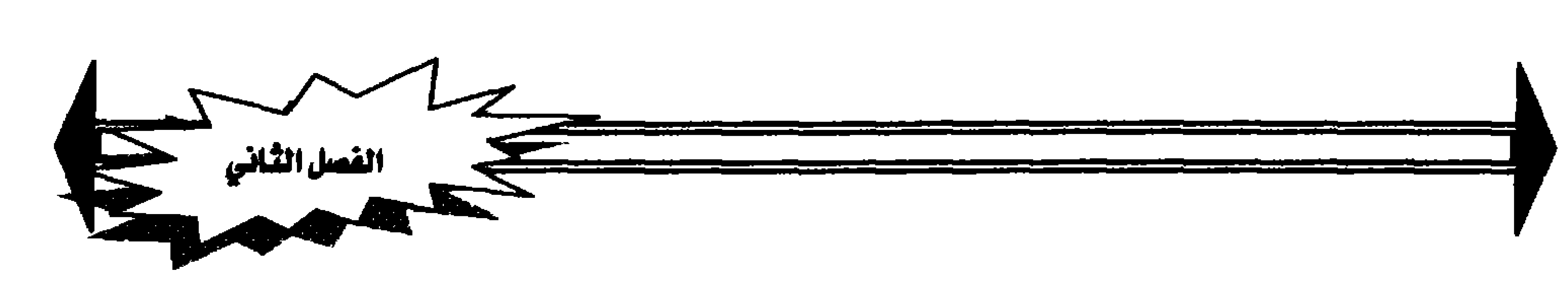
جـ) س^{٢}ص″ − ٢ س ص′ + ٢ص = ٠؛ ص$_{١}$ = س، ص$_{٢}$؛ ص٢ = س^{٢}؛
ص$_{٣}$=٢س−٣س^{٢}

د) ص′ − ص = هـ^{س} ؛ ص$_{١}$ = $\frac{س}{٢}$ هـ^{س} ؛ ص$_{٢}$ = (٤ + $\frac{س}{٢}$) هـ^{س} + ٣ هـ$^{-س}$.

هـ) ص′ = ٢ س ص + ١ ؛ ص$_{١}$ = هـ$^{س^{٢}}$+هـ$^{س^{٢}}$ $\int_{٠}^{س}$ هـ$^{-ش^{٢}}$ د ش

و) س^{٢} ص″ + ٥ س ص′ + ٤ ص = ٠ ، (س<٠) ؛ ص$_{١}$ = $\frac{٤ \text{ لو } س}{س^{٢}}$ ؛
ص$_{٢}$ = $\frac{-٦}{س^{٢}}$.

٤. (حزرنا) أن للمعادلة من النوع ص″ − ٤ص′ + ٥ص = ٠ حلاً بالشكل



ص = $هـ^{اس}$ جتاب س. أوجد هذا الحل. أيمكنك أن "تحزر" حلاً آخر؟

٥. "حزرنا" أن للمعادلة صً – ٣صَ – ٤ص = ٠ حلاً من النوع ص = $هـ^{اس}$ لبعض قيم الثابت أ، أوجد حلين لهذه المعادلة.

٦. إذا كان $ص_١$(س) و$ص_٢$(س) حلين لمعادلة التمرين ٥، تحقق من أن $ص_٣$(س) = $جـ_١$ $ض_١$(س) + $جـ_٢$ $ص_٢$ (س) حل أيضاً، وذلك بتعويض $ص_٣$ في المعادلة جـ١، جـ٢، ثابتان اعتباطيان.

٧. عيّن Φ(س) حيث يكون الاقترانان جا (لوس)، جتا (لوس)، (س > ٠) حلين للمعادلة [Φ(س) صَ]َ + $\frac{ص}{س}$ = ٠

٨. بين أن جا (١/ س) وجتا (١/ س) حلان للمعادلة التفاضلية

$$\frac{د}{د س} (س^٢ \frac{د ص}{د س}) + \frac{ص}{س^٢} = ٠ \qquad (١-٢١)$$

٩. حقق أن $ص_١$ = جا س، $ص_٢$ = جتا س حلان للمعادلة التفاضلية صً – ص = ٠

[إرشاد: جتا س = $\frac{١}{٢}$ ($هـ^{س}$ – $هـ^{-س}$) جاس = $\frac{١}{٢}$ ($هـ^{س}$ – $هـ^{-س}$)].

١٠. على فرض أن Φ(س) حل لمسألة القيم الابتدائية صً + ص صَ = $س^٣$، ص(–١)=١، صَ (–١) = ٢، أوجد Φَ(–١)، Φً(–١).

١١. على فرض أن Φ(س) حل للمعادلة صَ = $س^٢$ + $ص^٢$، ص(١) = ٢ أوجد Φَ(١)، Φً (١)، Φً (١).



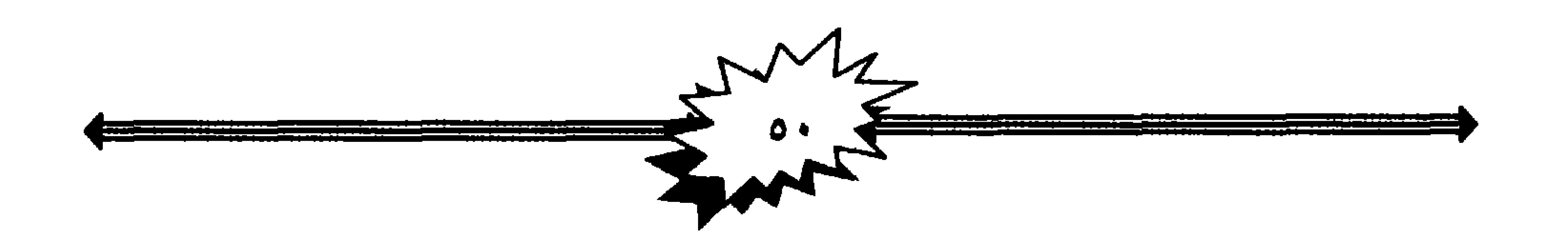


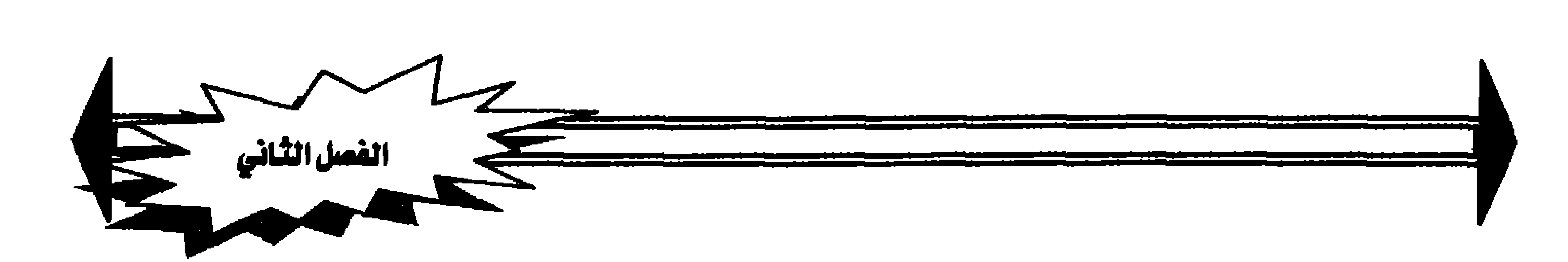
١-٣ معادلات الفروق:

معادلات الفروق هي المقابلات المتكاملة المميزة للمعادلات التفاضلية. تنشأ المعادلات التفاضلية في الدراسات الفيزيائية والبيولوجية، حيث تهمنا سرعة التغير اللحظية (المشتقة) لمتغير ما بالنسبة إلى متغير آخر. فمثلاً قد يهمنا السرعة في لحظة معينة لذرة مقذوفة في مسار ما أو تهمنا سرعة نمو مزرعة بكتيريا في لحظة محددة. ولكن هناك دراسات عديدة ينصب الاهتمام فيها على معرفة التغيرات (الفروق)، لا سرعة التغير.

ونظرية المعادلات التفاضلية تعيش معنا منذ وقت بعيد، أما معادلات الفروق فلم تحظ بالاهتمام الذي تستحقه إلاّ من وقت قريب، وقد نجم هذا الاهتمام الجديد عن دخول الحاسبة إلى الميدان. فبها تحل أنواع كثيرة من المعادلات (ومنها المعادلات التفاضلية العادية والجزئية) وذلك بحلول عددية تعتمد على تحويلها إلى صيغ معادلات الفروق.

وهذه من المفارقات، فإن كثيراً من المعادلات التفاضلية تبدأ معادلات فروق ثم ننظر في نهاية الأوضاع فتحول المعادلات إلى معادلات تفاضلية تقريبية. (ومعظم نماذج النمو السكاني من هذا القبيل) وقد كان هذا هو الإجراء المتبع حتى وقت قريب، لأن المعادلات التفاضلية كانت أسهل حلاً. ولكن المؤسف أن المعادلات التفاضلية التي نشأت عن معادلات فروق تقرّب أحياناً إلى معادلات فروق أخرى كثيراً ما تختلف عن المعادلات الأصلية اختلافاً كبيراً. وفي الفصل ٨ سندرس طرقاً عددية ونبين كيف تحل المعادلة التفاضلية بتقريبها إلى معادلة فروق.





المثال (١-٣-١):

مريض في مستشفى، وصلت رئتاه بجهاز الأكسجين. فلنفرض أن ح حجم الغاز في رئتيه بعد الشهق. وأن $ح_ز$ حجمه بعد الزفير (يسمى الحجم الخافت)، وأن الغاز يختلط في الرئتين اختلاطاً كاملاً، فكم يكون تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن؟.

كمية النيتروجين في الرئتين بعد الشهيق ن يجب أن تعادل كميته في الحيز الخافت بعد الزفير ن-١. فإذا كان $س_ن$ تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن يكون:

$$ح\ س_ن = ح_ز\ س_{ن-١} \quad ......(١-٢٢)$$

فبطرح ح $س_{ن-١}$ من طرفي (١-٢٢)، ينتج:

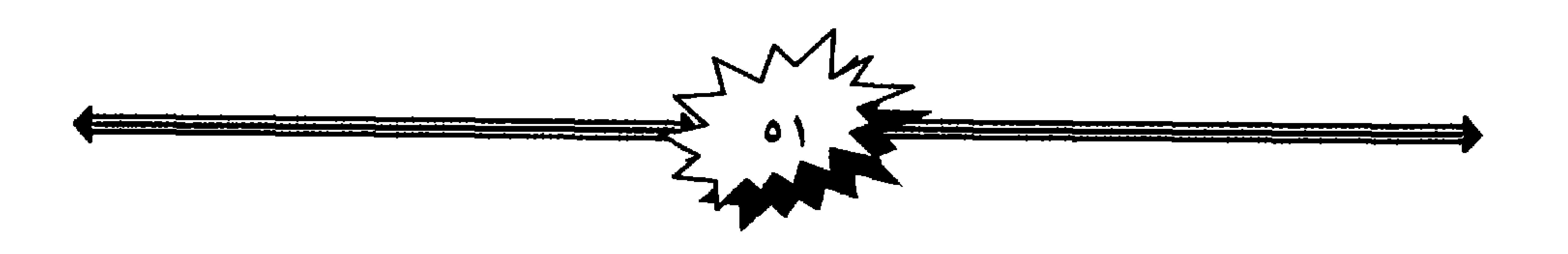
$$ح\ (س_ن - س_{ن-١}) = (ح_ز - ح)\ س_{ن} - ١ \quad ......(١-٢٣)$$

فالفرق $س_ن - س_{ن-١}$ هو المقابل المتكامل للمشتقة، لأنه يقيس التغير في تركيز النيتروجين. فتكون (١-٢٣) هي صورة متكاملة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

فإذا استطعنا أن نجد عبارة (بدلالة ن) للتركيز $س_ن$ تحقق (١-٢٢) لكل قيم ن=٠، ١، ٢.... نقول إننا وجدنا حلاً لمعادلة الفرق (١-٢٢)، ويسهل حل هذه المعادلة، لأن:

$$س_ن = \frac{ح_ز}{ح} س_{ن-١} = \left(\frac{ح_ز}{ح}\right)^{٢} س_{ن-٢} = ... = \left(\frac{ح_ز}{ح}\right)^{ن} س_٠$$ ، حيث

$س_٠$ هو تركيز النيتروجين في الهواء.





المثال (١-٣-٢):

يتزايد السمك في بركة حيث أن نموه في أي سنة يبلغ مثلي نموه في السنة التي سبقتها. فلتحليل هذه الحالة نفرض أن $ع_ن$ هو عدد السمك بعد ن من السنوات، فالزيادة بين السنة ن والسنة ن + ١ هي $ع_{ن+١} - ع_ن$ والمعادلة التي تحكم نمو السمك في هذه البركة:

$$ع_{ن+١} - ع_ن = ٢ (ع_ن - ع_{ن-١}) \qquad (١-٢٤)$$

ويمكن أن تكتب هذه على النحو:

$$ع_{ن+١} = ٣ع_ن - ٢ع_{ن-١} \qquad (١-٢٥)$$

فإذا حددنا العدد الابتدائي $ع_٠$، والعدد بعد سنة $ع_١$ تصبح المعادلة (١-٢٥) مسألة قيم ابتدائية، ويتضح أن لها حلاً وحيداً. فمثلاً إذا كان $ع_٠ = ٥٠$، $ع_١ = ٧٠$، يكون:

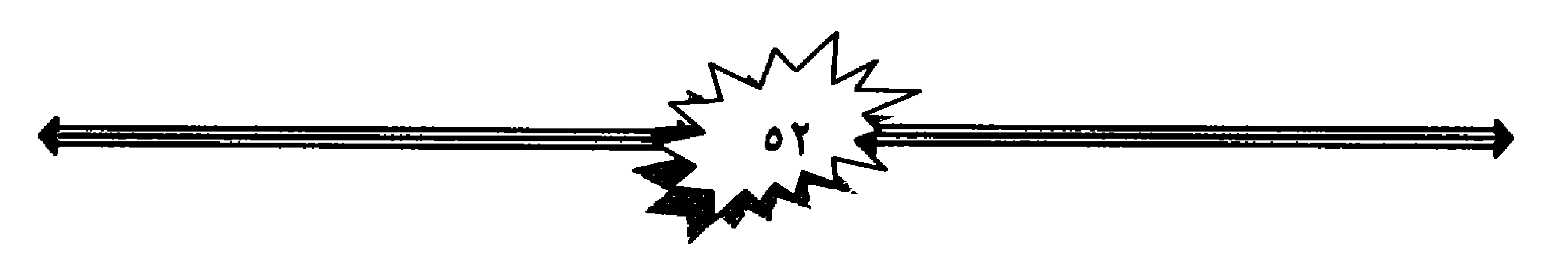
$$ع_٢ = ٣ع_١ - ٢ع_٠ = ١١٠$$

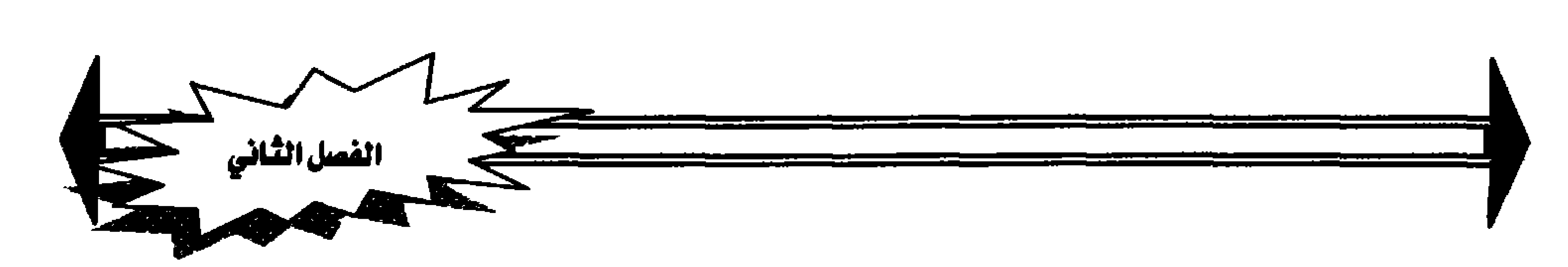
$$ع_٣ = ٣ع_٢ - ٢ع_١ = ١٩٠$$

$$ع_٤ = ٣ع_٣ - ٢ع_٢$$

وهكذا مطبقاً إن هذه الطريقة للحصول على $ع_ن$ متعبة، ولكن في الفصلين ٢، ٤ سنبين كيف أن بعض معادلات الفروق يمكن أن تحل بطريقة أقرب.

وقبل إيراد أمثلة أخرى نعرّف معادلة الفرق شكلياً بأنها معادلة تربط قيم $س_ن$ بالقيم المختلفة للرمز ن، فإذا كانت $ن_١$، $ن_٢$ هما على الترتيب أكبر وأصغر قيم ن، في المعادلة كانت $ن_١ - ن_٢$ هي رتبة معادلة الفرق.



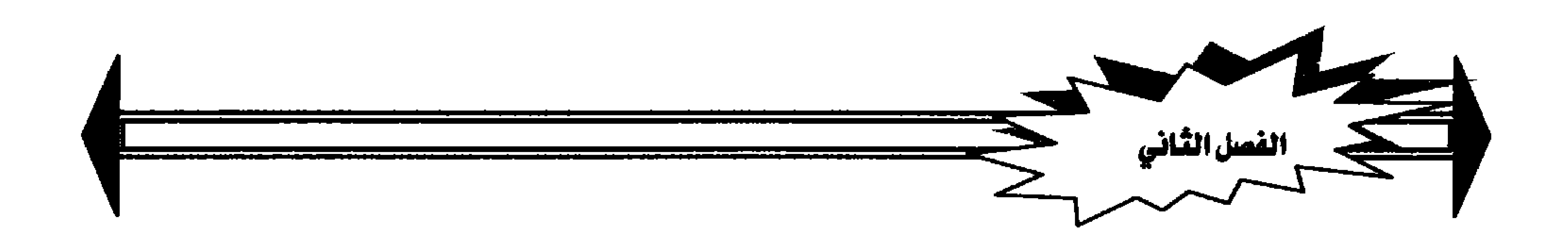


والمعادلة (١-٢٥) رتبتها (ن+١) – (ن-١) = ٢ في حين أن (١-٢٢) من الرتبة الأولى.

المعادلة: ١- ٣- ٣

افرض أن قوى رأسية ق١،............قن تؤثر على سلك على ن نقاط تتباعد على امتداد محور س مسافات متساوية كل منها هـ وحدات (انظر الشكل ١-١) فلتحليل هذا الوضع نفرض أن تؤثر الخيط ثابت بين أي نقطتين متتاليتين من نقاط تأثير القوى (وبالطبع هذا الثابت يختلف من مسافة لأخرى).

ونفرض أيضاً أن السلك لا وزن له. فإذا كان صك هناك هو انحراف السلك رأسياً، باتجاه محور ص عند النقطة سك، وكانت θك هي الزاوية بين اتجاه التوتر واتجاه محور س الموجب، يكون حسب الشكل ١-١:



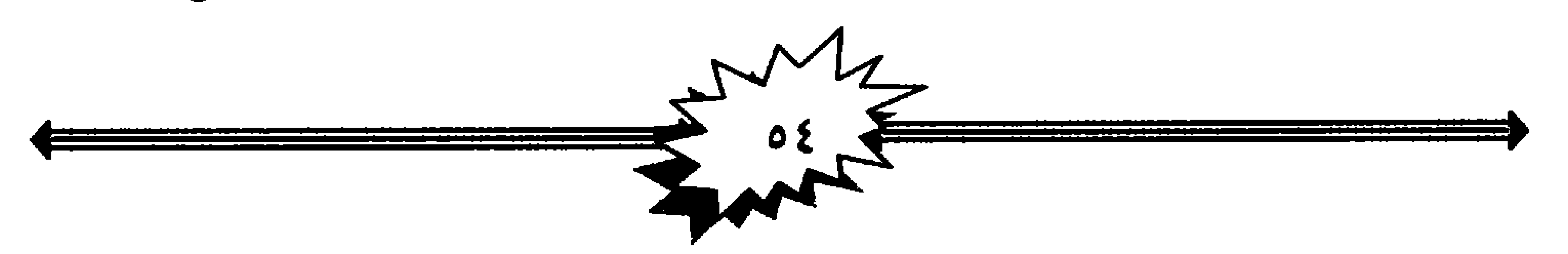
فالشكل ١:١

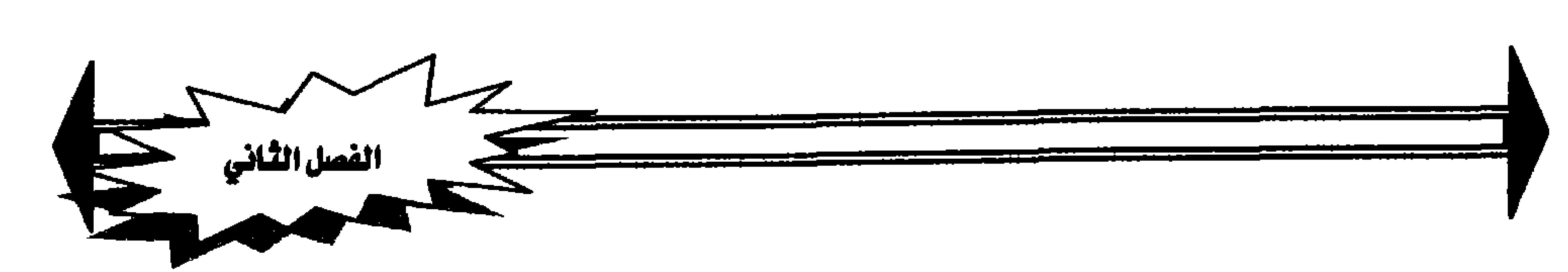
$$\text{ظا}\,\theta_{\text{ك}} = \frac{\text{ص}_{\text{ك}+1} - \text{ص}_{\text{ك}}}{\text{هـ}}$$

أي أن:

$$\text{ص}_{\text{ك}+1} - \text{ص}_{\text{ك}} = \text{هـ}\ \text{ظا}\,\theta_{\text{ك}} \quad \text{.................................} \quad (١-٢٦)$$

ولنذكر أن التوتر ثابت بين أي نقطتين متتاليتين فاتجاه قوة التوتر بينهما ثابت، فإذا فرضنا أن السلك ثابت (صَ=٠)، تكون محصلة كل القوى





على النقطة (س$_ك$، ص$_ك$) صفراً، ومركبة ت$_ك$ في اتجاه ص هي ت$_ك$ جا $\theta_ك$، ومركبة − ت$_{ك-١}$ في الاتجاه نفسه هي:

− ت$_{ك-١}$ جا $\theta_{ك-١}$. فنجمع القوة ق$_ك$ المبذولة على تلك النقطة، فينتج:

ت$_ك$ جا $\theta_ك$ − ت$_{ك-١}$ جا $\theta_{ك-١}$ + ق$_ك$ = ٠.........................(١−٢٧)

وكذلك باتجاه محور س: ت$_ك$ جتا $\theta_ك$ − ت$_{ك-١}$ جتا $\theta_{ك-١}$ = ٠....(١−٢٨)

وتشير المعادلة (١−٢٨) إلى أن مركبة التوتر باتجاه محور س لا يتغير. لذا سنرمز إلى ت$_ك$ جتا $\theta_ك$ بالرمز ت* $\frac{جا\,\theta_ك}{جتا\,\theta_ك} - \frac{ت^*\ جا\,\theta_{ك-1}}{جتا\,\theta_{ك-1}}$ + ق$_ك$ = ٠

أي أن: ت*(ظا $\theta_ك$ − ظا $\theta_{ك-١}$) + ق$_ك$ =٠........ (١−٢٩).

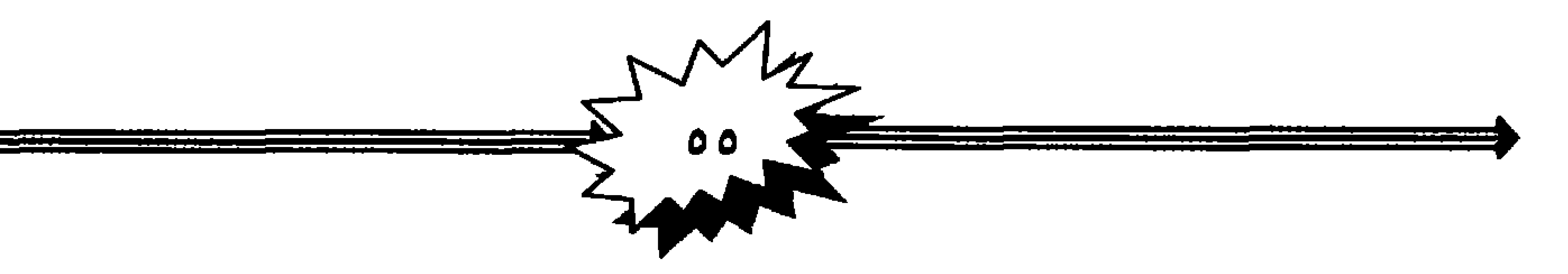
ونقيم (١−٢٦) و(١−٢٩)، نحصل على $\frac{ت^*}{هـ}$(ص$_{ك+١}$ − ص$_ك$) − (ص$_ك$ − ص$_{ك-١}$) + ق$_ك$ =٠

أي أن: ص$_{ك+١}$ − ٢ص$_ك$ + ص$_{ك-١}$ + $\frac{هـ}{ت^*}$ ق$_ك$ = ٠.............(١−٣٠)

وهي معادلة فروق من الرتبة الثانية. ولكن على خلاف المثال السابق، ليس من المناسب تعيين قيمتين ابتدائيتين ص$_٠$، ص$_١$ هنا ولكن تتجلى أمامنا القيمتان الحاصرتان:

ص$_٠$ = ٠ ، ص$_{ن+١}$ = ٠...(١−٣١)

فالمعادلات (١−٣٠) و(١−٣١) تكون فيهما مسألة قيم حاصرة، وهذه المسألة لم تكتمل صياغتها بعد، لأن ت* غير معروف، فإذا عرفنا ص$_١$ والتوتر الابتدائي ت$_٠$، يكون: ظا $\theta_٠$ = ص$_١$/ هـ فينتج أن:



$$ت^{*} = ت_{.}\ \text{جتا}\ \theta_{.} = = \frac{ت_{.}}{\sqrt{1+(ص_{1}/هـ)^{2}}}$$

مثال(١-٣-٤):

تصور مجتمعاً يتزايد من جيل إلى جيل، وليكن عدده $ع_{ن}$ في الجيل ن. وواضح أن العدد في الجيل ن يعتمد على العدد في الجيل الذي قبله، وقد يعتمد أيضاً على الأعداد في الأجيال التي قبلهما، فمثلاً قد تستنفذ أجيال سابقة معظم الموارد حتى يصير التكاثر على الأجيال اللاحقة صعباً أو مستحيلاً، فالمعادلة:

$س_{ن+٢} = ر\ س_{ن+١} + ز\ س_{ن}$ ....(١-٣٢)

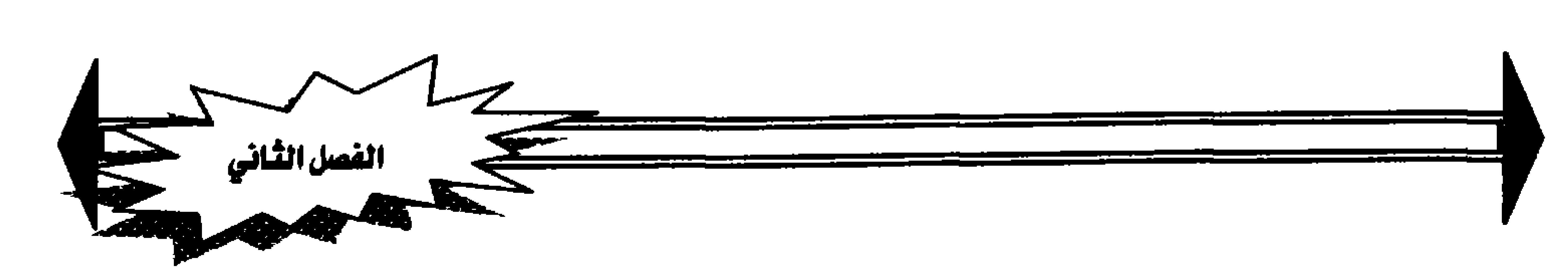
يمكن اعتبارها نموذجاً للنمو السكاني حيث يتكون الجيل ن + ٢ من عناصر ن + ١ وعناصر من الجيل ن والثابتان ر، ز يقيسان الأهمية النسبية لهذين المكوّنين.

المثال(١-٣-٥):

تبارى شخصان في لعبة، وكان الرهان ديناراً كل مرة، وكان احتمال ربح الأول كل مرة ف، واحتمال ربح الثاني ق؛ ف + ق = ١، فلنفرض أن مجموع ما كان معهما د ديناراً ولنجعل $س_{ك}$ يرمز إلى احتمال أن يربح الأول في النهاية كل ما مع الثاني حيث ك هي عدد الدنانير التي مع الأول، حيث $٠ \leq ك \leq د$. فإذا كان الأول معه الآن ك، فإن احتمال أن يصير معه في اللعب الثانية ك + ١ هو ف، واحتمال أن يصير معه ك -١ هو ق. فيكون:

$س_{ك} = ف^{٢}\ س_{ك+١} + ق\ س_{ك-١}$ ، ....(١-٣٣)

والقيمتان الحاصرتان هما $س_{.} = ٠$ ، $س_{د} = ١$ ....(١-٣٤)



وسنعود إلى هذا المثال في البند ٤-٨، وسنجد أنه إذا كانت $ف_١$ أكثر ولو قليلاً من $\frac{١}{٢}$ يصير الاحتمال كبيراً جداً في أن يؤول كل المبلغ إلى الأول، حتى وإن بدأ بأقل مما مع الثاني. وهذا هو الحال في نوادي القمار حيث يكون الخط دائماً في جانب النادي.

وهذا قد تفيد معادلات الفروق في حساب التكامل:

المثال (١-٣-٦) يتصل التكامل التالي بقيمة اقتران الخطأ الذي كثيراً ما ينشأ في المسائل الفيزيائية:

$$كا_ك(س) = \int_{س}^{\infty} \frac{(ن - س)^{ك}}{ك!} هـ^{-ن^٢} . د ن ....(١-٣٥)$$

حيث ك! = ك (ك-١) (ك - ٢) ....٣ × ٢ × ١، ك عدد صحيح موجب، ٠! = ١ ويمكن أن نكتب $كا_ك$ س على النحو التالي:

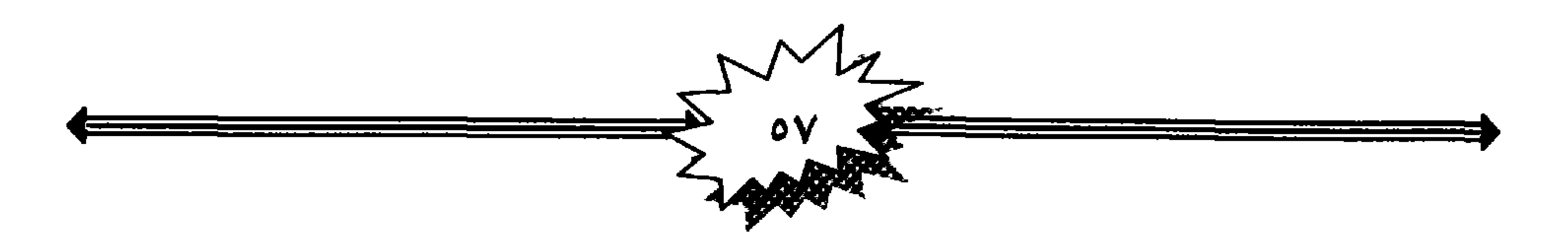
$$كا_ك (س) = \frac{١}{ك} \int_{س}^{\infty} (ن - س) \frac{(ن - س)^{ك-١}}{(ك-١)!} هـ^{-ن^٢} . د ن$$

$$= - \frac{س}{ك} كا_{ك-١} (س) + \frac{١}{ك} \int_{س}^{\infty} \frac{(ن - س)^{ك-١}}{(ك-١)!} ن هـ^{-ن^٢} . د ن...... (١-٣٦)$$

فبمكاملة الحد الأخير من هذه المعادلة بالأجزاء ينتج:

$$كا_ك (س) = - \frac{س}{ك} كا_{ك-١} (س) + \frac{١}{٢ك} كا_{ك-٢} (س)............(١-٣٧)$$

ومثل هذه من معادلات الفروق تسمى علاقات تكرار (recurrence relations) لاحظ أن:





$كا_0(س) = \int_{س}^{\infty} هـ^{-ن^2}$ د ن فإذا كاملناها بالأجزاء ينتج:

$$كا_1(س) = \int_{س}^{\infty} (ن - س) هـ^{-ن^2} . د ن = \frac{هـ^{-س^2}}{2} - س \, كا_0 (س)$$

ولمعرفة هاتين القيمتين لأي س يمكن أن نحسب $كا_ن(س)$ لكل ك.

وعلى الأخص: إذا كان س = ٠، يمكن أن نستعمل القانون ٥٨ في الملحق ١ لنحصل على أن $كا_0(0) = \sqrt{\pi / 2}$، وأن $كا_1(0) = \frac{1}{2}$ فمن (١-٣٧) ينتج:

$$كا_ك(0) = \frac{1}{2 ك} كا_{ك-2}(0)، فإذا \; كا_{2ن}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2ن+1} ن!} \; و \; كا_{2ن+1}(0) = \frac{(ن+1)!}{(2ن+2)!}$$

التمارين (١-٣):

١. اذكر رتبة كل من معادلات الفروق التالية:

أ) $ص_ن + 1 = (ص_ن)^2$

ب) $ص_{ن+3} = (ص_ن)^2 - 3ن$

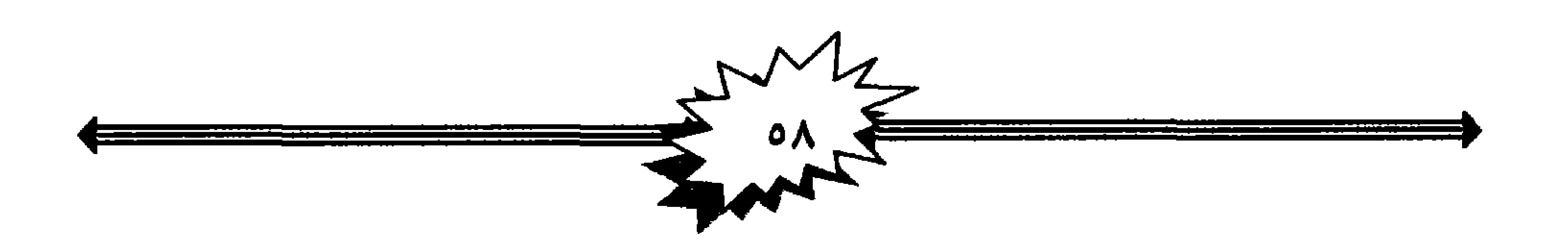
جـ) $ص_ن + 3 = (ص_ن + 1)^3$

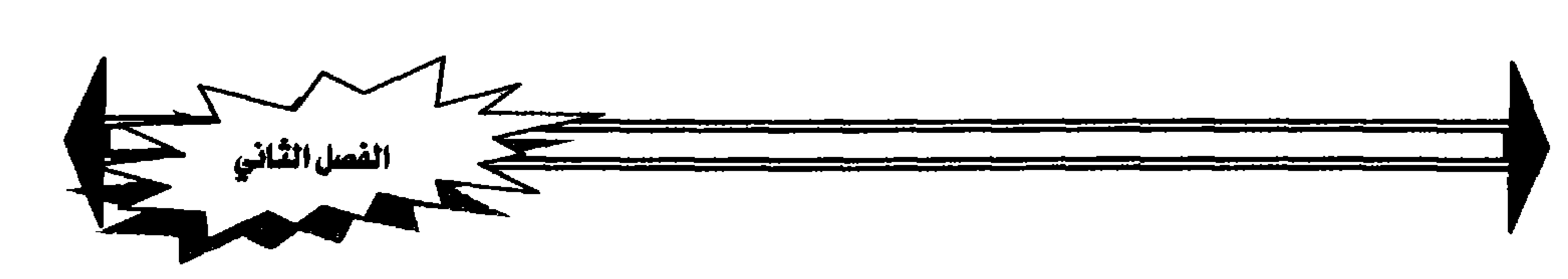
د) $(ص_ن + 3)^5 = \sqrt{ص_ن + 2}$

هـ) $ص_{ن+5} - 2ص_ن + 3 + ص_ن^2 = ن^2 + 6$

و) $ص_{ن+1} - ن + ص_ن - \sqrt{ن-2} = 0$

ز) $ص_ن \, ص_{ن+1} \, ص_{ن+2} - ص_{ن+3} \, ص_{ن-1} = 2ن^2$





٢. وضح بالرسم البياني عمليات النمو المتميزة التي تمثلها الصيغ التالية، ابتداء من الزمن ن=٠ هل يقترب سن من قيمة حاصرة (أو من اتزان) باقتراب ن من اللانهاية؟

أ) $س_ن = ١٠٠ + ١٠٠ (٢)^{-ن}$

ب) $س_ن = ١٠٠ + ١٠٠ (\frac{١}{١+ن^٢})$

ج) $س_ن = ١٠٠ + ٥ن^٢$

د) $س_ن = \sqrt{٩+ن}$

٣. تحقق أن $س_ن = ن^٢ + ن$ حل لمعادلة الفرق $س_{ن+١} - س_ن = ٢(ن+١)$، وأن $ص_ن = ن^٢+ن+جـ$ حل آخر لها، مهما تكن قيمة الثابت جـ.

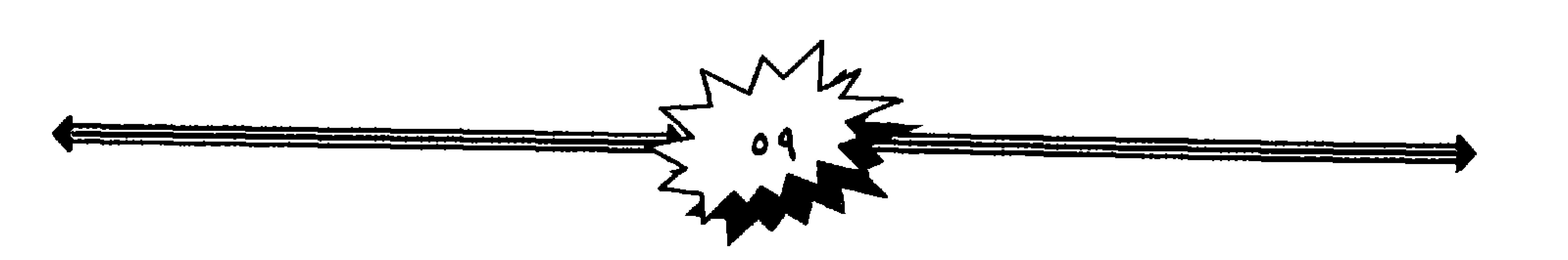
٤. تحقق أنه مهما تكن قيمة الثابت ك، فإن $س_ن = ك \times ٢^{ن(ن+١)/٢}$ حل لمعادلة الفرق: $س_٢ = ٢^ن س_{ن-١}$

٥. كان نمو البكتيريا في مزرعة وافرة الغذاء يقاس مرة كل ساعتين. فكان كل مرة يزيد ٣٠ في المئة عما كان في سابقتها.

(أ) صف عملية نموه بمعادلة فرق تعطي $ع_ن$ أي عدد البكتيريا بعد ن ساعات.

(ب) ما رتبة هذه المعادلات؟

(ج) إذا كان العدد الابتدائي ١٠٠٠، فما قيمة $ع_٢$؟ $ع_٤$؟





٦. قدر ما ينتج الفرد الواحد في أمريكا من نفايات بحوالي ٥ باوند يومياً، ويتزايد هذا بمعدل ٤ في المئة في السنة. فليكن $ف_ن$ هو معدل إنتاج الفرد الواحد من النفايات بعد ن من السنوات:

أ) صف بمعادلة فرق تزايد إنتاج الفرد الواحد للنفايات.

ب) أوجد $ف_٢$، $ف_٤$.

٧. "حزرنا" أن للمعادلة $ص_{ن+٢} - ٣ص_{ن+١} - ٤ص_ن = ٠$ حلولاً من النمط $ص_ن = \lambda^ن$، حيث λ ثابت ما، أوجد حلين لهذه المعادلة.

٨. على فرض أن $ص_ن$، $ع_ن$ حلان لمعادلة الفرق $ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ٠$ حيث أن، $ب_ن$ اقترانان في ن، بيّن أن $ف_ن = جـ_١ ص_ن + جـ_٢ ع_ن$ هو أيضاً حل، مع جميع قيم الثابتين $جـ_١$، $جـ_٢$.

٩. بين أنه مهما يكن الثابتان $جـ_١$، $جـ_٢$ فإن:

$$ص_ن = \frac{١}{١٤} (ن - \frac{٩}{١٤})^٢ + جـ_١ - جـ_٢ (-٦)^ن.$$

حل لمعادلة الفرق:

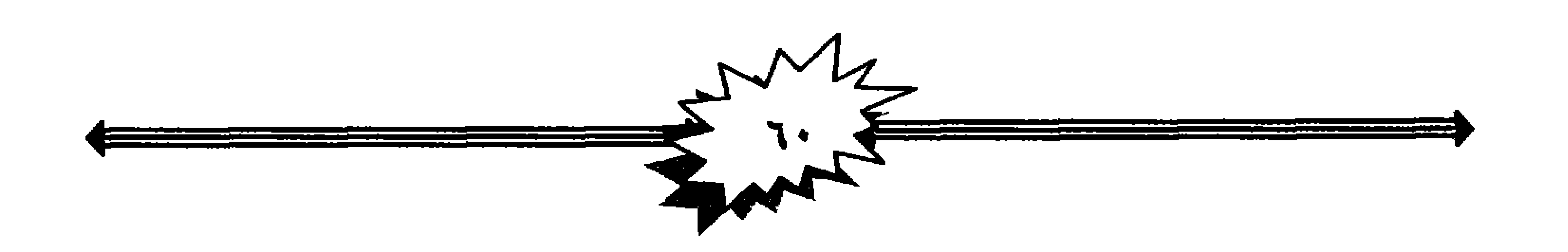
$$ص_{ن+٢} + ٥ ص_{ن+١} - ٦ ص_ن = ن$$

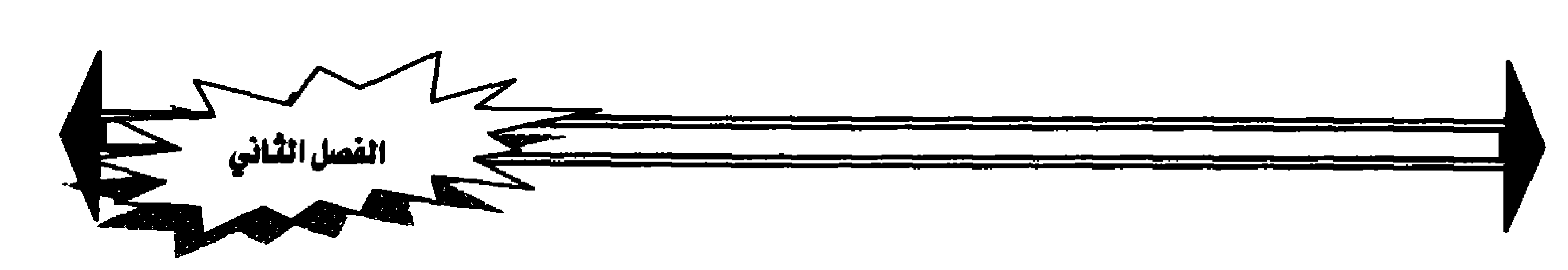
١٠. حقق أن $ص_ن = ن \times ٢^{ن-١}$ حل لمعادلة الفرق.

$$ص_{ن+٢} - ٣ص_{ن+١} + ٢ص_ن = ٢^ن$$

١١. تحقق أن $س_ن = ٢^ن$، $ص_ن = ن \times ٢^ن$ حلان لمعادلة الفرق

$$ص_{ن+٢} - ٤ص_{ن+١} + ٤ص_ن = ٠$$





١٢. تحقق أن: $ع_ن$ = $جـ_١$ $٢^ن$ + $جـ_٢$ ن $٢^ن$ + $\frac{ن^٢}{٨}$ $٢^ن$، حيث $جـ_١$، $جـ_٢$ أي ثابتين، حل المعادلة الفرق $س_{ن+٢}$ − ٤$س_{ن+١}$ + ٤$س_ن$ = $٢^ن$.

١٣. تحقق أن $س_ن$ = $جـ_١$ جا(٢نπ/ ٣) + $جـ_٢$ جتا(٢نπ/ ٣) حل لمعادلة الفرق $ص_{ن+٢}$+$ص_{ن+١}$+$ص_ن$=٠ مع جميع قيم الثابتين $جـ_١$، $جـ_٢$. أوجد حلاً يحقق الشرطين الابتدائيين $ص_٠$=١، $ص_١$=٢.

١٤. يعرّف اقتران جاما بالصيغة: ٣(ع) = $\int_{٠}^{\infty}$ $هـ^{-س}$ $ن^{ع-١}$. د ن

بين أنه يحقق معادلة الفرق ٣(ع) = (ع−١) ٣(ع−١)، ثم أثبت أن ٣(ع)= (ع−١)!، ع عدد موجب.

١٥. ليكن $كا_ك$ (س) = $\int_{٠}^{\pi}$ $\frac{جتا ك ن - جتا ك س}{جتا ن - جتا س}$. دن بيّن أن $كا_ك$ يحقق معادلة الفرق:

$كا_{ب+٢}$ (س) − ٢ $كا_ك$ (س) جتا س + $كا_{ك-١}$ (س) = ٠





المصفوفات

الفصل الثالث

المصفوفات

١.١ مقدمة:

تعتبر المصفوفات من المفاهيم الحديثة في مجال الرياضيات وتطبيقاتها. وقد لاقت اهتماماً كبيراً من علماء الرياضيات حيث وجدوا لهم مجالاً كبيراً من خلالها للبحث عن مجالات تطبيقها في الحياة العملية وقد دخلت مجالات كثيرة ساعدت في حلول المعادلات ذات المجاهيل الكثيرة من حيث وعدد المتغيرات. وهذا يحصل غالباً في التطبيقات الإحصائية والاقتصادية وفي مجال الإنتاج وغيره من المجالات الأخرى وقبل الخوض في العمليات على المصفوفات لا بد من التعرف على ماهية المصفوفة ومكوناتها وأنواعها إلى ما شابه ذلك من المفاهيم.

تعريف (١-١):

المصفوفة هي منظومة من الأعداد الحقيقية وضعت ضمن أقواس متعامدة لتعطي اسماً وقد اصطلح على أن يكون أحد أحرف الأبجدية لتأخذ الشكل التالي:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \cdots\cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \text{أ}_{م١} & \text{أ}_{م٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{من} \end{bmatrix}$$



ويمكن صياغة الصورة أعلاه على النحو.

أ = [أ$_{ij}$] ، i = ١، ٢، ....م

j = ١، ٢، ....ن

وتدل م على عدد الصفوف في المصفوفة بينما يدل ن على عدد الأعمدة وكذلك يدل م×ن على رتبة المصفوف وتسمى العناصر.

أ$_{١١}$ ، أ$_{٢١}$،.................. أ$_{ij}$ مداخل المصفوفة.

وتكون مداخل المصفوفة ناتجة من تقاطع الصف مع العمود الدال على موقع المدخل ويكون عدد مداخل المصفوفة ناتج من العلاقة التالية: عدد المداخل = ن × م.

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد المثال التالي:

مثال (١-١): لتكن لدينا المصفوفة: أ= $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١- \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

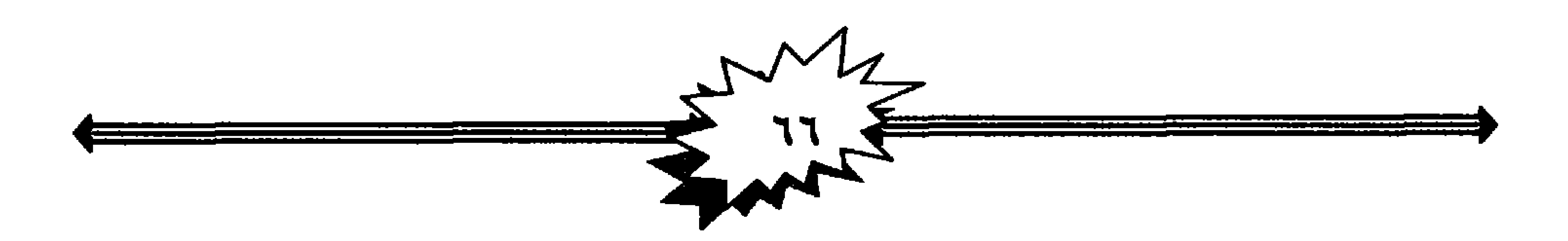
والمطلوب إيجاده:

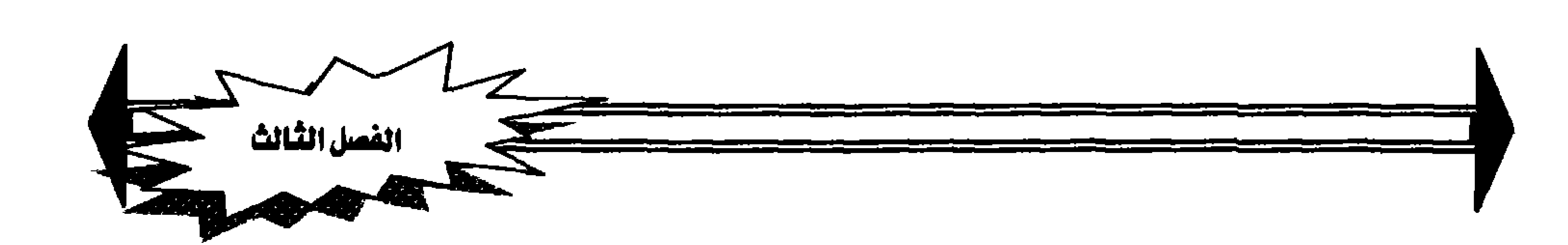
١) رتبة المصفوفة

٢) عدد مداخل المصفوفة أ

٣) قيم المداخل أ$_{٣٣}$، أ$_{١١}$، أ$_{٢١}$، أ$_{٣٢}$

٤) عدد الصفوف للمصفوفة وعدد الأعمدة فيها.





الحل:

١) رتبة المصفوفة ٣×٣

٢) قيم المداخل المطلوبة $أ_{٣٣}$ =١، $أ_{١١}$ =٢، $أ_{٢١}$=٣، $أ_{٣٢}$=٠

٣) عدد المداخل ٩=٣×٣

٤) عدد الصفوف = ٣، عدد الأعمدة = ٣.

ملاحظة: أي مصفوفة على الصورة العامة يمكن كتابتها كمصفوفات صفوف على النحو التالي:

- $أ_١ = [أ_{١١} \quad أ_{٢١} .... أ_{١ن}]$ $\quad أ_٢ = [أ_{١٢} أ_{٢٢} .... أ_{٢ن}]$

- $أ_م = [أ_{م١} أ_{م٢} .... أ_{م ن}]$ وكذلك يمكن كتابتها على شكل مصفوفات أعمدة

$$أ^{(١)} = \begin{bmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ \vdots \\ أ_{١م} \end{bmatrix} \quad أ^{(٢)} = \begin{bmatrix} أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} \\ \vdots \\ أ_{٢م} \end{bmatrix} \quad .... \quad أ^{(ن)} = \begin{bmatrix} أ_{١ن} \\ أ_{٢ن} \\ \vdots \\ أ_{م ن} \end{bmatrix}$$

(٢-١) تساوي مصفوفتين:

تعريف (٢-١) لتكن لدينا المصفوفتان $أ = [أ_{i\,j}]$ $\quad ب = [ب_{i\,j}]$

فإذا كان لكل i ، j $أ_{i\,j} = ب_{i\,j}$ فإننا نقول أن المصفوفتين أ= ب أو بتعبير آخر $[أ_{i\,j}]=[ب_{i\,j}]$ وبصورة عامة تتساوى المصفوفتان إذا كانت المداخل المتناظرة متساوية أي إذا:





$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{٣١}} & \text{ب}_{\text{٢١}} & \text{ب}_{\text{١١}} \\ \text{ب}_{\text{٣٢}} & \text{ب}_{\text{٢٢}} & \text{ب}_{\text{١٢}} \\ \text{ب}_{\text{٣٣}} & \text{ب}_{\text{٢٣}} & \text{ب}_{\text{١٣}} \end{bmatrix}$$

كانت: وحتى تكون المصفوفتان أ، ب متساويتان أي أ = ب إذا كان:

$\text{أ}_{\text{١١}} = \text{ب}_{\text{١١}}$ $\quad \text{أ}_{\text{٢١}} = \text{ب}_{\text{٢١}}$ .... $\text{أ}_{\text{٣٣}} = \text{ب}_{\text{٣٣}}$

مثال (٢-١): إذا كان لدينا المصفوفتان

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ فهل المصفوفتان أ، ب متساويتان.

الحل: أ ≠ ب لأن $\text{أ}_{\text{١٢}} \neq \text{ب}_{\text{١٢}}$ على الرغم من أن لهما نفس الرتبة.

مثال (٣-١): إذا كان لدينا المصفوفتين:

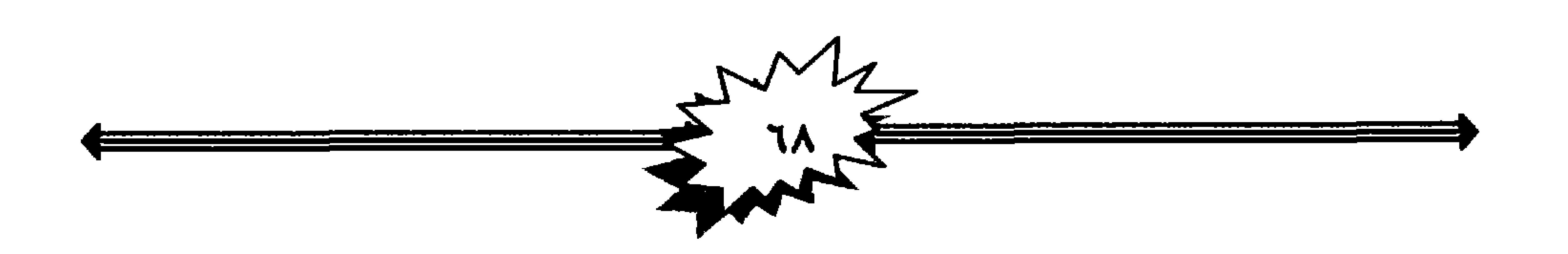
$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ فهل المصفوفتان أ- ب متساويتان؟

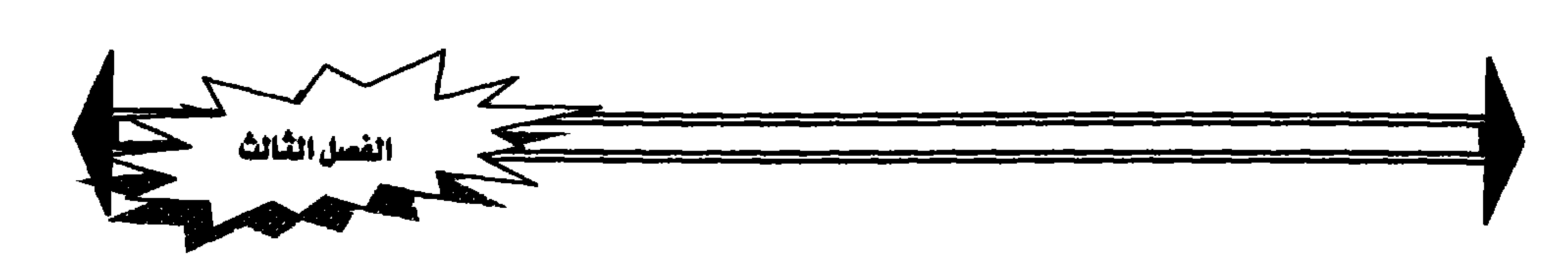
الحل:

إن رتبة المصفوفة أ هي (٢×٢) أما رتبة المصفوفة ب هي (٣×٢) وبما أن رتبة المصفوفتان غير متساويتان أي (٣×٢) ≠ (٢×٢) وعليه فإنهما غير متساويتين.

مثال (٤-١): على اعتبار أن:

$$\begin{bmatrix} ت & ٢ & ١ \\ ٤ & س & ٢ \\ ٢ & -٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ & ٢ \\ ع & ص & ٠ \end{bmatrix}$$





المطلوب: إيجاد مجموع ت + ع + ص + س.

الحل: بما أن المصفوفتان متساويتين فمن هذه الخاصية فإن العناصر المتناظرة متساوية وعليه فإننا نجد أولاً قيم المجاهيل ثم نأخذ المجموع أي: ت = -١، ع =٢، ص = -٤، س = -٣ وعليه فإن -٦= (-١) + ٢ + (-٤) + (-٣) = ت + ع + ص + س

مثال (٥-١): إذا كان لدينا المصفوفتان:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢س - ص & ١ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣س + ص & ٧ \end{bmatrix}$$

وكانت المصفوفتان متساويتين فأوجد قيم ص، س ثم أوجد س + ص

الحل: نجد أولاً قيم ص، س على النحو التالي بما أن أ = ب فإن:

(١) ....٤ = ٢س - ص يجمع (١) مع (٢)

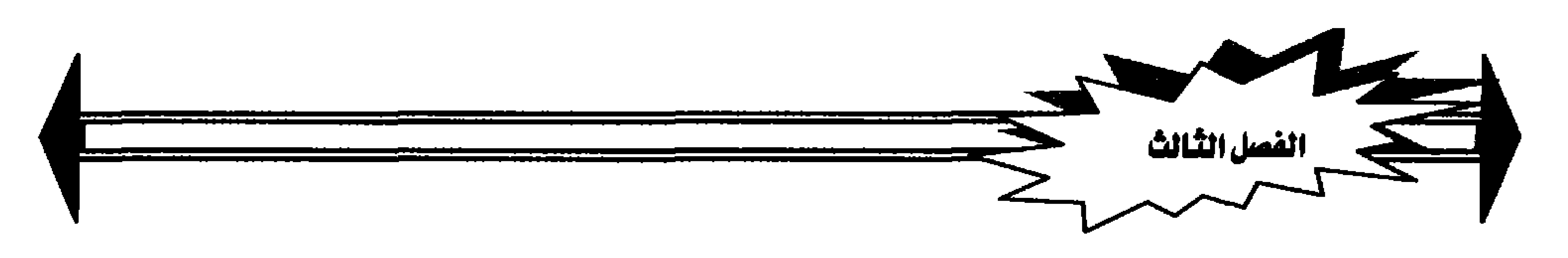
(٢) ....٦ = ص + ٣س

٥س = ١٠ ⟸ س = ٢

وبالتعويض عن س في معادلة (١) نجد أن:

٢ (٢) - ص = ٤ ⟸ ص = ٠

وعليه فإن: س + ص = ٢ + ٠ = ٢



(٣-١): أنواع المصفوفات: Kinds of Matrices

هناك الكثير من هذه الأنواع ولكن ستركز دراستنا على أهم هذه المصفوفات:

(١) المصفوفة المربعة: Square Matrix

تعريف (٣-١): إذا كان عدد صفوف مصفوفة ما مساوياً لعدد الأعمدة فإنه يقال لهذه المصفوفة بالمصفوفة المربعة وتكون صورتها العامة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{ن١}} \cdots\cdots & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{\text{ن٢}} \cdots\cdots & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \text{أ}_{\text{نم}} \cdots\cdots & \text{أ}_{\text{٢ن}} & \text{أ}_{\text{١ن}} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

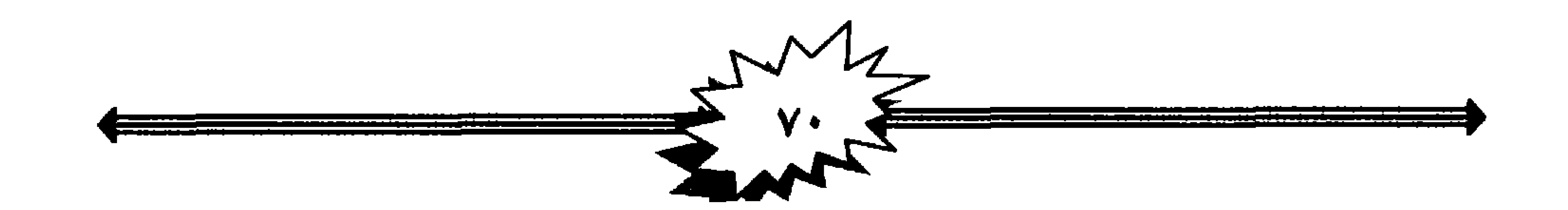
مثال (٦-١): هل المصفوفات التالية مصفوفات مربعة؟

الحل: المصفوفة أ مصفوفة مربعة من الرتبة (٣×٣) بينما المصفوفة ب ليست مصفوفة مربعة لأن رتبتها (٣×٢).

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ب} \qquad \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ١- & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(٢) المصفوفة الصفرية: Zero Matrix

تعريف (٤-١): تكون المصفوفة مصفوفة صفرية إذا كانت جميع مدخلاتها صفراً فالمصفوفات التالية:



$$أ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad ب = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad ج = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

جميعها مصفوفات صفرية ويمكن التعبير عن المصفوفة الصفرية

$أ = [\,أ_{ij}\,]_{م\times ن} = [\,0\,]_{م\times ن} = 0_{م\times ن}$

(٣) المصفوفة المحايدة أو الوحدة: Identity Matrix

$أ = [\,أ_{ij}\,]$

تعريف (٥-١):

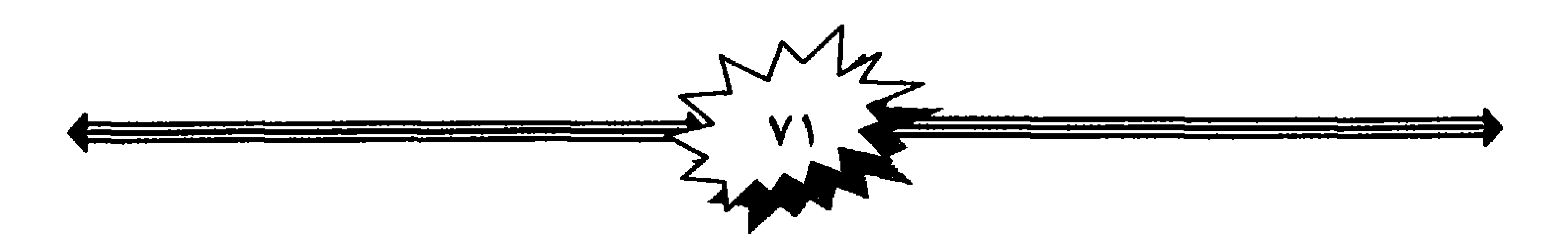
يقال للمصفوفة بأنها المصفوفة المحايدة للضرب إذا كانت جميع عناصر القطر الأول للمصفوفة I وباقي عناصرها الأخرى صفراً بحيث تكون المصفوفة مربعة ويرمز لها بالرمز $I_ن$ حيث ن تدل على رتبة المصفوفة المربعة والصورة العامة لهذه المصفوفة:

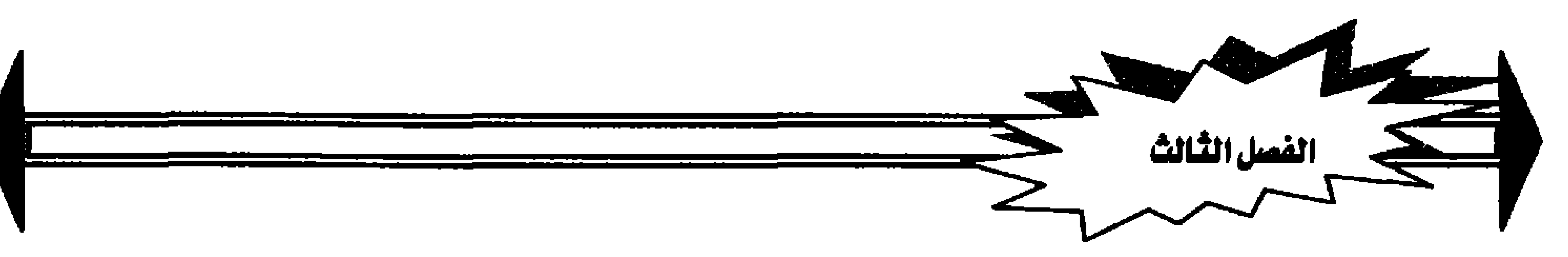
$$I_ن = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_1 = [1] \qquad (٤)$$

المصفوفة المتماثلة: Symmetric Matrix

تعريف (٦-١):

يقال للمصفوفة المربعة بأنها مصفوفة متماثلة حول القطر الأول إذا كانت العناصر فوق القطر الأول مساوية للعناصر تحت القطر الأول.





مثال (٧-١): هل المصفوفة: أ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & -3 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة متماثلة؟

الحل: المصفوفة أ مصفوفة متماثلة لأن جميع العناصر فوق القطر الأول مساوية لجميع العناصر تحت القطر الأول.

(٥) المصفوفة المتماثلة العكسية : Anti-Symmetric

تعريف (٧-١):

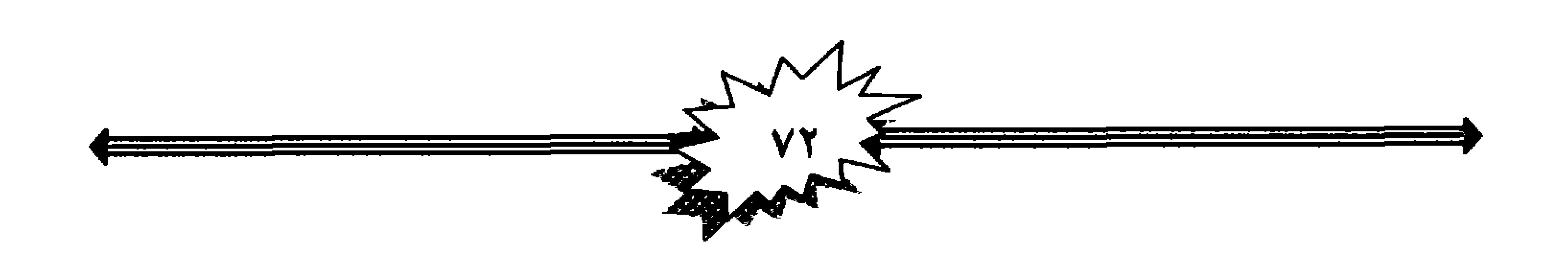
يقال للمصفوفة أ بأنها متماثلة عكسية إذا كانت عناصر المصفوفة فوق القطر الأول مساوية عناصر المصفوفة تحت القطر الأول عددياً ومخالفة لها في الإشارة وكانت عناصر القطر الأول صفراً.

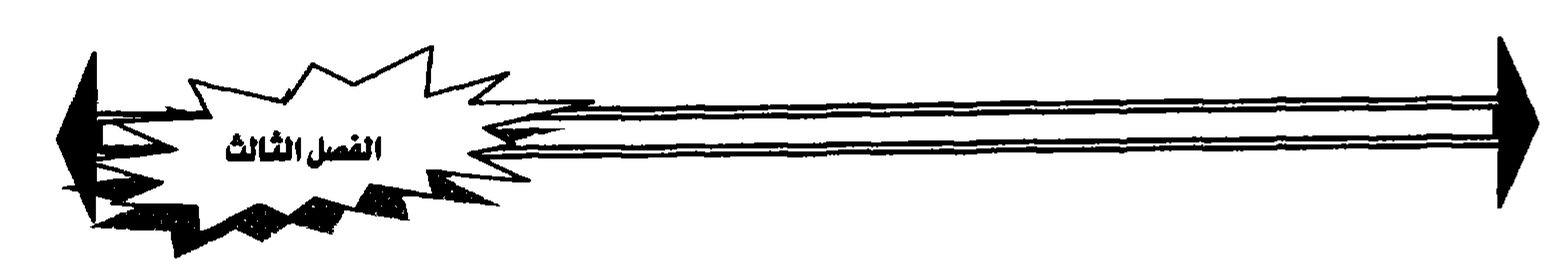
مثال (٨-١): هل المصفوفة المربعة أ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة عكسياً؟

الحل: نعم المصفوفة أ متماثلة عكسياً لأنها حققت الشروط الواردة في التعريف.

(٦) المصفوفة القطرية : Diagonal Matrix

تعريف (٨-١): يقال للمصفوفة المربعة بأنها قطرية إذا كانت عناصر القطر الأول تختلف عن الصفر وباقي العناصر صفراً.





مثال (٩-١): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات قطرية؟

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}_{٣\times٣} \quad ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}_{٢\times٢} \quad ج = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٦ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}_{٤\times٤}$$

الحل: نعم تمثل مصفوفات قطرية لأن عناصر قطرها الرئيسي أعداداً حقيقية تختلف عن الصفر وباقي عناصرها صفراً.

(٧) المصفوفة العددية:

تعريف (٩-١): تسمى المصفوفة القطرية التي يتساوى فيها عناصر قطرها الرئيسي وباقي العناصر صفراً بالمصفوفة العددية وهي تمثل حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

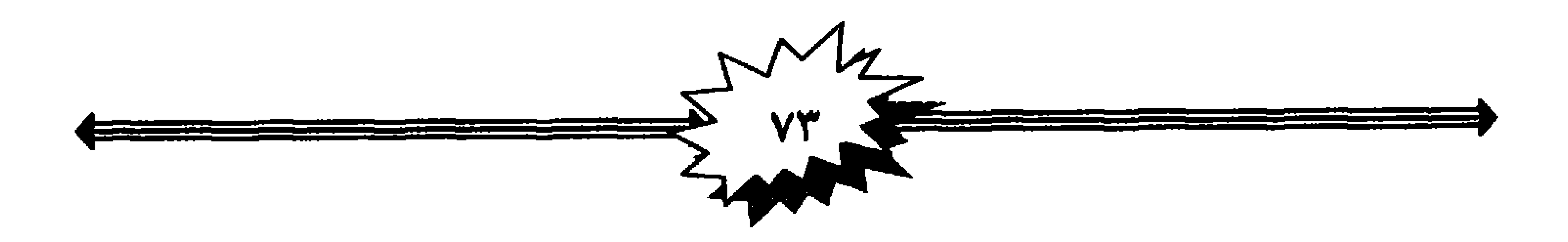
مثال (١٠-١): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات عددية؟

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}_{٣\times٣} \quad ب = \begin{bmatrix} \sqrt{٢} & ٠ \\ ٠ & \sqrt{٢} \end{bmatrix}_{٢\times٢}$$

الحل: نعم مصفوفة عددية لأن عناصر قطرها الرئيسي متساوية.

تعريف (١٠-١):

يقال للمصفوفة $أ = [\,أ_{ji}\,]_{ن\times م}$ الناشئة من تبديل المصفوفة $أ = [\,أ_{ij}\,]_{م\times ن}$ بأعمدتها بمبدول المصفوفة أ.



مثال (١١-١):

إذا كان لدينا أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ & ١ \\ ٠ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد مبدول (أ)، مبدول (ب).

الحل: باستخدام التعريف أعلاه فنقوم بتبديل عناصر الصفوف لتصبح عناصر للأعمدة في مبدول المصفوفة وعليه فإن:

مبدول (أ) = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ مبدول ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(١-٤) **العمليات على المصفوفات** (Operations on Matrices):

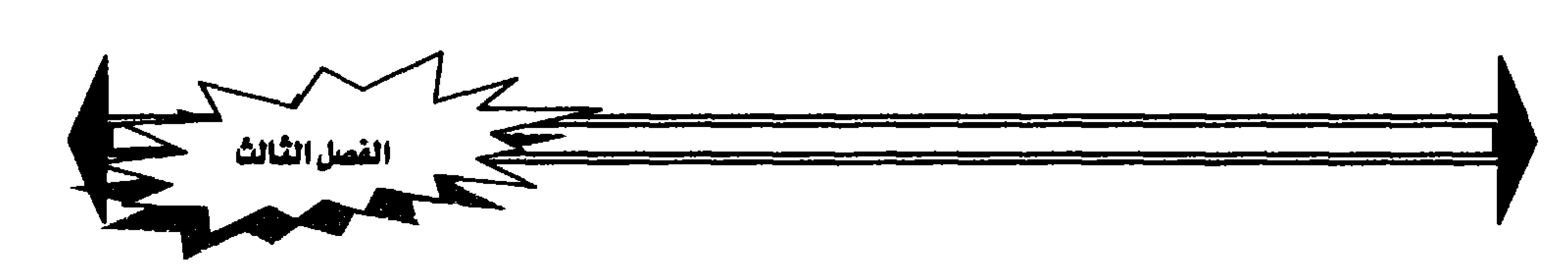
(١-٤-١): عملية الجمع على المصفوفات Addition Operation on Matrices:

تعريف (١١-١): لتكن لدينا المصفوفتان:

أ = [أ$_{ij}$] ، ب = [ب$_{ij}$] لهما نفس الرتبة فالمصفوفة الناتجة من جمع عناصر المصفوفتين المتناظرة جمعاً عددياً تسمى بمصفوفة الجمع للمصفوفتين أ، ب وتسمى بالمصفوفة جـ أي:

أ + ب = [أ$_{ij}$] + [ب$_{ij}$] = [جـ$_{ij}$] = جـ

وإذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ب_{٢١} & ب_{١١} \\ ب_{٢٢} & ب_{١٢} \end{bmatrix}$



فإن المصفوفة الناتجة جـ = [جـ$_{ji}$] =

$$\begin{bmatrix} أ_{11} + ب_{11} & أ_{21} + ب_{21} \\ أ_{12} + ب_{12} & أ_{22} + ب_{22} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: تسمى المصفوف [٠]$_{م\times ن}$ بمصفوفة محايدة بالنسبة لعملية الجمع لباقي مجموعة المصفوفات أي:

$$[\ ٠\ ]_{م\times ن} + [\ أ_{ji}\ ]_{م\times ن} = [\ أ_{ji}\ ]_{م\times ن} = [\ أ_{ji}\ ]_{م\times ن} + [\ ٠\ ]_{م\times ن}$$

مثال (١٢-١): أوجد إن أمكن ناتج الجمع بين المصفوفتين:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & -١ & ٥ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

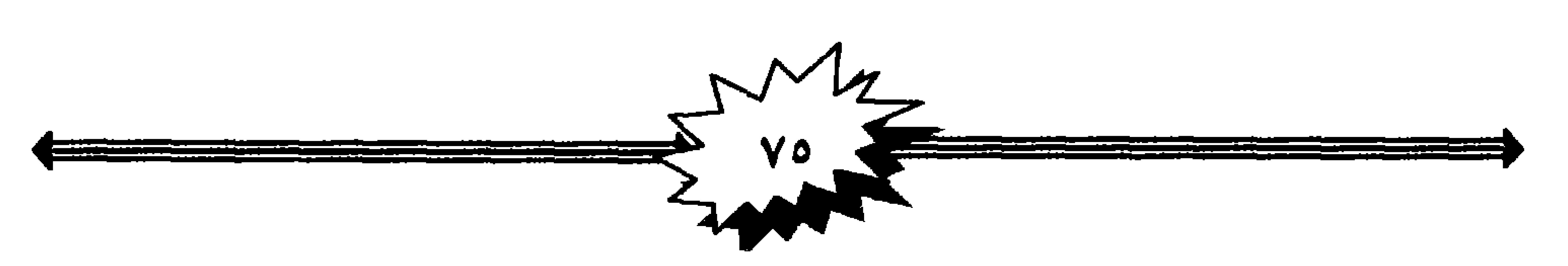
الحل: بالنظر إلى رتبة كل من المصفوفتين نلاحظ أن رتبة أ هي (٣×٢) بينما رتبة ب هي (٢×٢) وعليه فإنه لا يمكن جمع المصفوفتين أ، ب لأنه ليس لهما نفس الرتبة.

مثال (١٣-١):

إذا كانت لدينا المصفوفتين:

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & -٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج أ + ب، ب + أ وماذا تستنتج؟





الحل:

$$\text{أ+ب}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-3 & 2+1\\ 1+4 & 4-2\\ 2+0 & 5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix}=\text{جـ}$$

$$\text{ب+أ}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & 1+2\\ 4+1 & -2+4\\ 0+2 & 2+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix}=\text{جـ}$$

نلاحظ أن جـ = أ + ب = ب + أ أي أن الجمع يحقق الخاصية التبديلية على جمع المصفوفات.

مثال (١٤-١):

إذا كان $\text{أ}=\begin{bmatrix}\sqrt{50} & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{bmatrix}-\sqrt{18} & 2\\ \text{لو}_3\text{س} & -1\end{bmatrix}$

$\text{جـ}=\begin{bmatrix}4^{\text{ص}} & 4\\ \text{لو}_9 16 & 2\end{bmatrix}$ وكان جـ = ب + أ أثبت أن ١ = ص.س

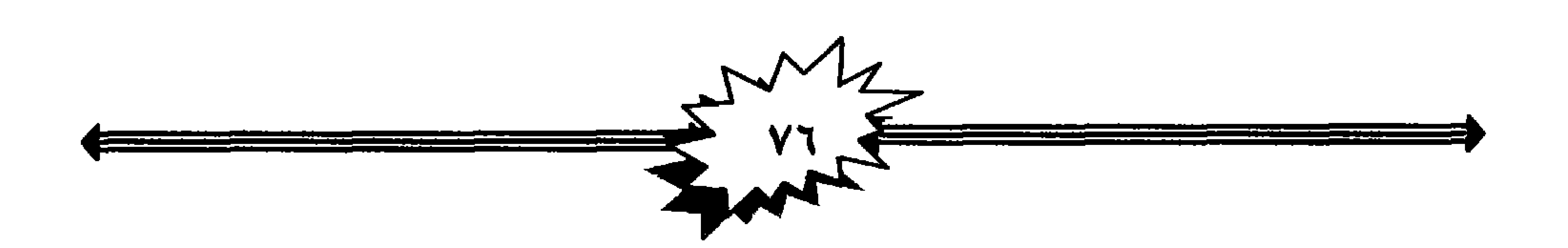
الحل:

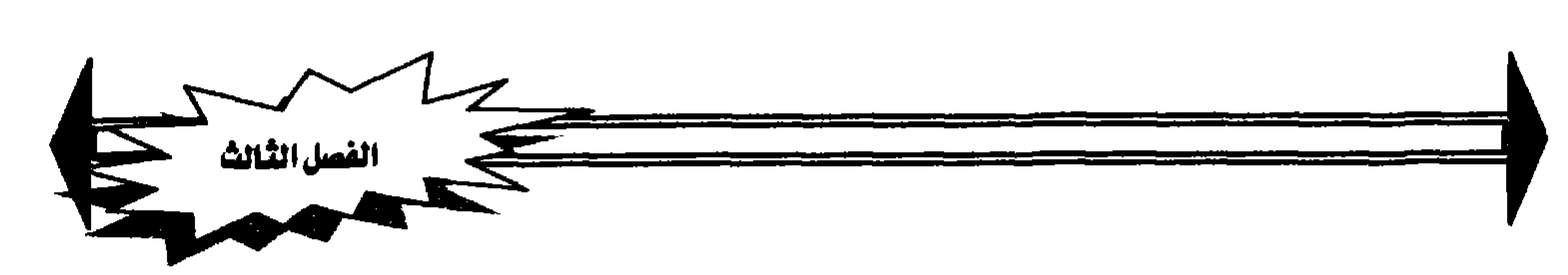
$$\text{أ+ ب}=\begin{bmatrix}\sqrt{50} & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sqrt{18} & 2\\ \text{لو}_3\text{س} & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sqrt{2} & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\sqrt{2} & 2\\ \text{لو}_3\text{س} & -1\end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 2\\ 1+\text{لو}_3\text{س} & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^{\text{ص}} & 2\\ \text{لو}_9 16 & 2\end{bmatrix}\Leftarrow 4^{\text{ص}}=2\sqrt{2}\Leftarrow 2^{2\text{ص}}=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftarrow 2\text{ص}=\frac{3}{2}\Leftarrow \text{ص}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftarrow 1+\text{لو}_3\text{س}=\text{لو}_3\text{س}+$$





لو$_{٢}$س = لو$_{٩}$ ١٦ $\Longleftarrow$ لو$_{٢}$ ٣س = لو$_{٢}$ ٤س $\Longleftarrow$ ٣س = ٤ $\Longleftarrow$ س = $\frac{٤}{٣}$

س.ص = $\frac{٤}{٣} \cdot \frac{٣}{٤}$ = ١ وهو المطلوب.

٢-٤-١: معكوس المصفوفة الجمعي:

تعريف (١٢-١):

لتكن لدينا المصفوفة أ = [أ$_{ji}$] فإننا نقول للمصفوفة -أ = - [أ$_{ji}$] بالمصفوفة العكسية بالنسبة لعملية الجمع للمصفوفة أ بحيث أ + (-أ) = (-أ) + (أ) = ٠$_{م×ن}$

ولإيجاد المعكوس الجمعي للمصفوفة أ نقوم بضرب كل عنصر من عناصر أ في -١

مثال (١٥-١): إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد معكوس المصفوفة الجمعي.

الحل: كما سبق وأن ذكرنا أنه لإيجاد معكوس المصفوفة الجمعي نضرب جميع عناصر المصفوفة أ في - ١ لينتج: - أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣- & ٠ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix}$ وهذا هو معكوس أ الجمعي.

٣-٤-١: عملية الطرح على المصفوفات:

تعريف (١٣-١):

لتكن المصفوفتان أ = [أ$_{ji}$]$_{م×ن}$ ، ب = [ب$_{ji}$]$_{م×ن}$ من الرتبة ن×م



فإن الفرق بين المصفوفتين ب، أ ما هو إلاّ مجموع المصفوفة أ مضافاً إليها معكوس المصفوفة الجمعي للمصفوفة ب وبصيغة الرموز فإن:

$$\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} + (-\text{ب}) = [\,\text{أ}_{ji}\,] - [\,\text{ب}_{ji}\,] = [\,\text{أ}_{ji}\,] + [\,-\text{ب}_{ji}\,] = [\,\text{أ}_{ji} - \text{ب}_{ji}\,]$$

مثال (١٦-١): إذا كان لدينا المصفوفتان:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٦ \\ ٢- & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد ب-أ.

الحل:

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٦ \\ ٢- & ٣ & ٧ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٤- & ٦- \\ ٢ & ٣- & ٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥- & ١ \\ ٥ & ١ & ٦- \end{bmatrix}$$

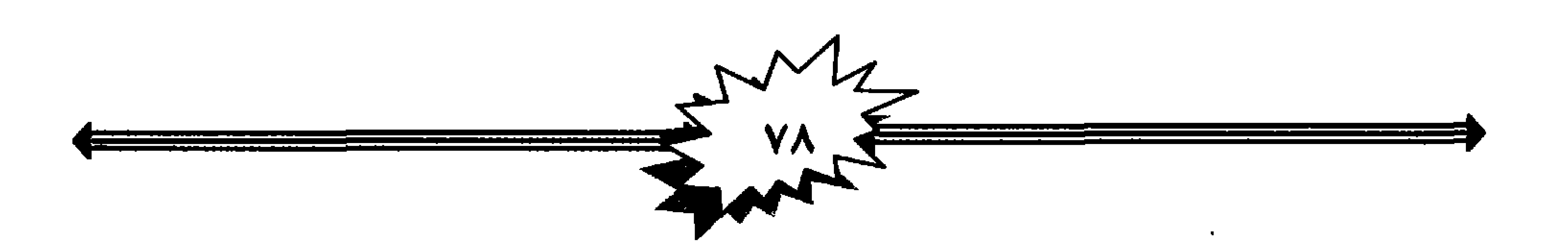
نظرية (١-١): إذا كان لدينا المصفوفات ٠، جـ ب، أ لها نفس الرتبة وتحقق الخصائص التالية:

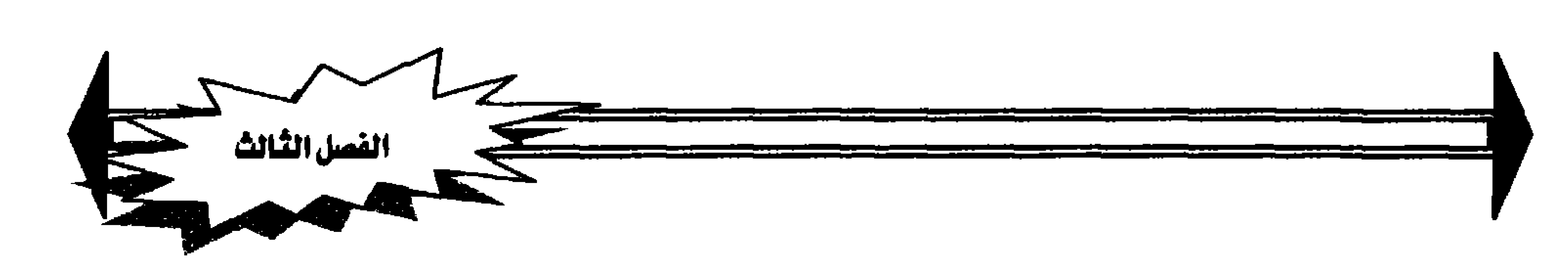
١) أ + ب = ب + أ.

٢) أ + (ب + جـ)

٣) أ + ٠ = ٠ + أ = أ

٤) أ = (-أ) = (-أ) + أ = ٠





فإن مجموعة المصفوفات المكونة لهذه المصفوفات وعملية الجمع تشكل زمرة إبدالية.

تعريف (١٤-١):

لتكن ك $\in$ح، أ = [$أ_{ji}$] فإنه يقال ك أ = ك [$أ_{ji}$]$_{م\times ن}$ = [ك $أ_{ji}$]$_{م\times ن}$ بأنه حاصل ضرب عدد حقيقي ك في المصفوفة أ، أي أنه إذا كان:

$$ك \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} كأ_{١١} & كأ_{٢١} \\ كأ_{١٢} & كأ_{٢٢} \end{bmatrix}$$

أي أنه لضرب مصفوفة في عدد فإننا نقرب كل عنصر في أ العدد ك.

مثال (١٧-١): إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ أوجد ناتج ٣أ.

الحل: ٣أ = ٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ & ١٢ \\ -٣ & ٦ & -١٥ \end{bmatrix}$

ملاحظات:

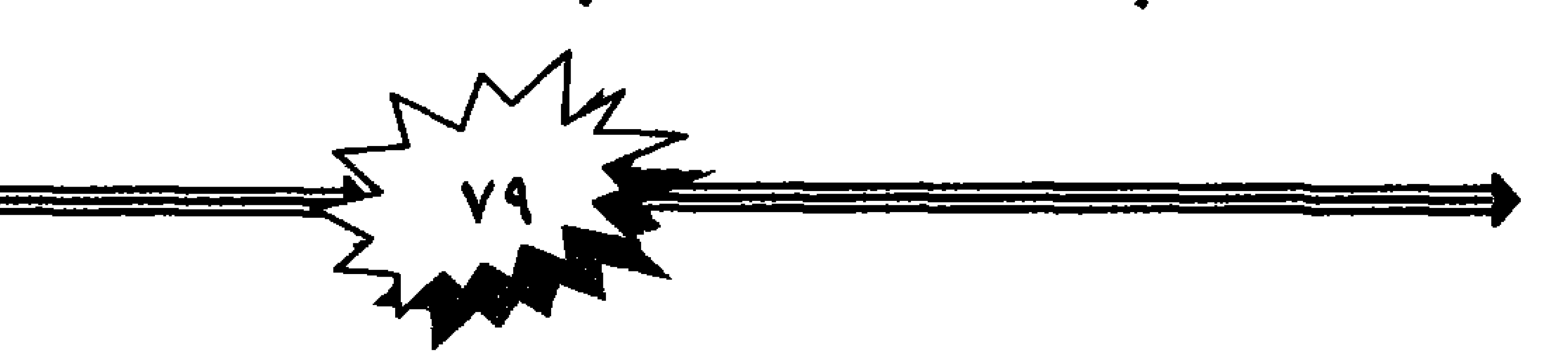
١) ليكن لدينا المصفوفة أ = [$أ_{ji}$]$_{م\times ن}$ والصفر عدد حقيقي فإنه ينتج

٠ . أ = ٠ . [$أ_{ji}$]$_{م\times ن}$ = [٠ . $أ_{ji}$]$_{م\times ن}$ = [٠]$_{م\times ن}$ = $٠_{م\times ن}$

٢) لجمع مصفوفة مع عدد حقيقي فإننا نضرب العدد الحقيقي بمصفوفة محايدة من نفس الرتبة وناتج الضرب يجمع بالمصفوفة الأصلية.

نظرية (٢-١): لتكن لدينا المصفوفات ب، أ وأن لدينا العددان الحقيقيان هـ، و فإن:

١) هـ(أ + ب) = هـ . أ + هـ . ب   ٣) هـ (و أ) = (هـ و) . أ



٢) أ (هـ + و) = أ . هـ + أ . و　　　　٤) ١ . أ = A

٠ . أ = ٠

مثال (١٨-١): إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ **فأوجد ٣ أ + ٥.**

الحل:

$$٣\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} + ٥ = ٣\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} + ٥\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٩ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٩ & ١٧ \end{bmatrix}$$

مثال (١٩-١): إذا كان لدينا المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ **ب =** $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة ٣أ – ٥ب؟

الحل:

$$٣أ - ٥ب = ٣\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ٧ \end{bmatrix} - ٥\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ٦ \\ ٦ & ١٢ & ٢١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٢٥ \\ -١٠ & -١٥ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -٣ & ٣١ \\ -٤ & -٣ & ١٦ \end{bmatrix}$$

مثال (٢٠-١): أوجد قيم س+ص لتحقق المعادلة:

$$س\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} - ص\begin{bmatrix} ٤ \\ ٧ \end{bmatrix} = ٢\begin{bmatrix} ١ \\ -٥ \end{bmatrix}$$

الحل: نجد ناتج حواصل الضرب على النحو التالي:

ومن تساوي المصفوفتان نجد أن: $\begin{bmatrix} ٢س \\ -س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ص \\ -٧ص \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ -١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{س} & -٤\text{ص} \\ -\text{س} & -٧\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -١٠ \end{bmatrix}$$

٢س − ٤ص = ٢

-٢س − ١٤ص = −٢٠

٢س − ٤ص = ٢

٢ (− س − ٧ص) = − ١٠

٢س − ٤(١) = ٢ ⟸ ٢س − ٤ = ٢ ⟸ ٢س = ٢ + ٤

٢س = ٦ ⟸ س = ٣

وبالتعويض عن قيمة ص = -١ في أحد المعادلتين وحل المعادلة نجد قيمة س.

س + ص = ٣+١ ⟸ س + ص = ٤

لهذا فإن -١٨ص = -١٨ ⟸ ص = ١

(٤-٤-١) حاصل ضرب مصفوفتين (Product of two matrices):

تعريف (١٥-١):

إذا كان لدينا المصفوفة أ من الرتبة ن×م والمصفوفة ب من الرتبة ل×ن فنسمي المصفوفة جـ = [جـ$_{ij}$]$_{م×ل}$ الناتجة من حاصل ضرب المصفوفة أ = [أ$_{ij}$]$_{م×ن}$ في المصفوفة ب= [ب$_{ij}$]$_{ن×ل}$ والتي تنتج من العلاقة التالية:

$$\text{جـ}_{ij} = \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{أ}_{i\text{ك}}\,\text{ب}_{\text{ك}j} = \text{أ}_{i1}\,\text{ب}_{1j} + \text{أ}_{i2}\,\text{ب}_{2j} + \ldots \text{أ}_{i\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}j} ،\quad i = ١، ٢، \ldots\ldots \text{م}$$



j = ١، ٢،.........ل

وعليه فإن: [أ$_{ji}$]$_{ن×ل}$. [ب$_{ji}$]$_{ل×م}$ = [جـ$_{ji}$]$_{ن×م}$

أو جـ = ب.أ

وعليه فإننا عند ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى فإننا نضرب عناصر الصف الأول في عناصر العمود الأول المقابلة ثم جمع نواتج حاصل الضرب.

ملاحظة: عند عملية الضرب فإنه يجب أن يتساوى عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مع عدد صفوف المصفوفة الثانية.

مثال (٢١-١):

إذا كان لدينا المصفوفتان: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب= $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل:

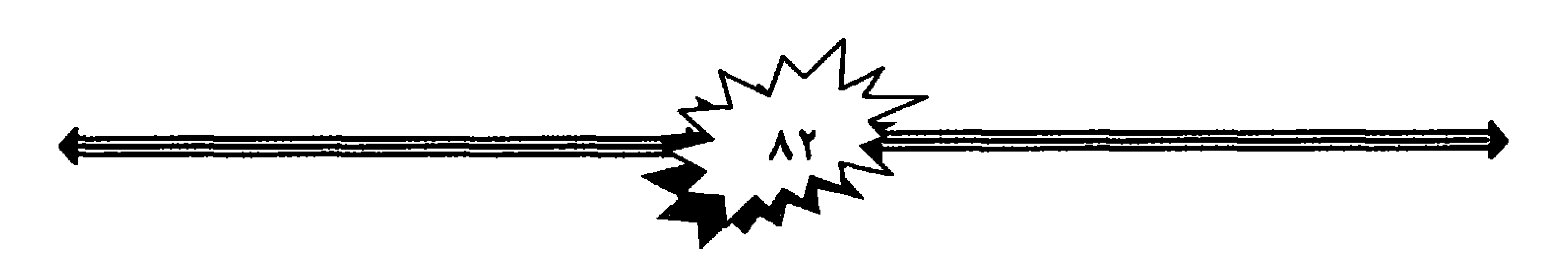
أ. ب= $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}^{٢×٣} . \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{bmatrix}^{٣×٢} =$

$\begin{bmatrix} ٢٢ & ١ & ١٣ \\ -١٦ & ٥ & -٥ \\ ٢ & ٥ & ٥ \end{bmatrix}^{٣×٣}$

مثال (٢٢-١): إذا كان لدينا المصفوفتان: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}^{٢×٣}$

والمطلوب: إيجاد أ.ب

الحل: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢ \\ ٥ & ٢٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ \\ ٢٩ \end{bmatrix}$



مثـــال (٢٣-١): إذا كـــان لـــدينا المـــصفوفتان $أ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد أ. ب، ب . أ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$أ.ب = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+6 & 4+6 \\ 1+4 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ب.أ = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & -3+8 \\ 2-2 & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $أ.ب \neq ب.أ$

ملاحظة:

١) ضرب المصفوفات لا يحقق خاصية الإبدال.

٢) ضرب المصفوفة في المصفوفة المحايدة يعطي المصفوفة الأصلية. وعليه فـإن المصفوفة المحايدة لا تؤثر في عملية الضرب.

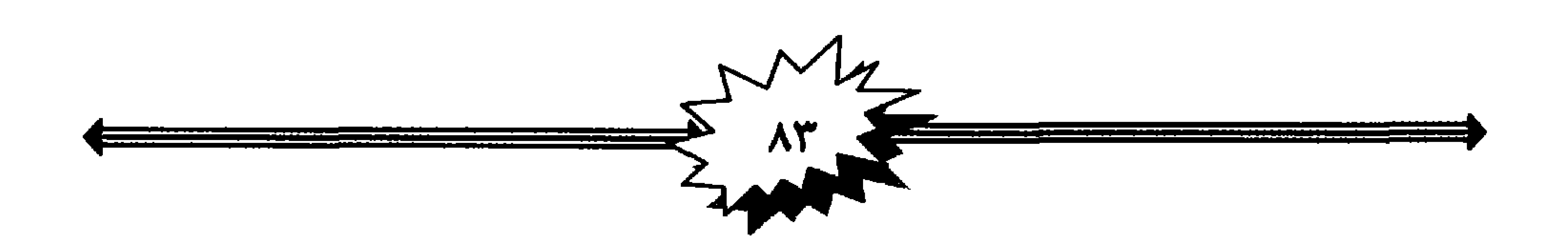
مثال (٢٤-١):

إذا كان لدينا المصفوفتان $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $أ = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد I.أ وماذا تستنتج؟

الحل: $أ = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = I.أ$

أي أننا نستنتج أن المصفوفة أ لم تتأثر من عملية الضرب.





مثال (٢٥-١):

إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ أوجد ب.أ

الحل: أ.ب = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفتين قطريتين فإن حاصل ضرب هاتين المصفوفتين هو حاصل ضرب العناصر المتقابلة على القطرين وباقي العناصر صفراً.

نظرية (٣-١):

إذا كان لدينا مصفوفتان ب، أ فإن:

١) إذا كان ٠ = ب.أ فليس بالضرورة أن يكون أ=٠ أو ب=٠.

٢) إذا كان أ$_{م×ن}$ ، ب$_{ن×ل}$، جـ$_{ل×ك}$ = أ (ب جـ) = (أ ب)جـ

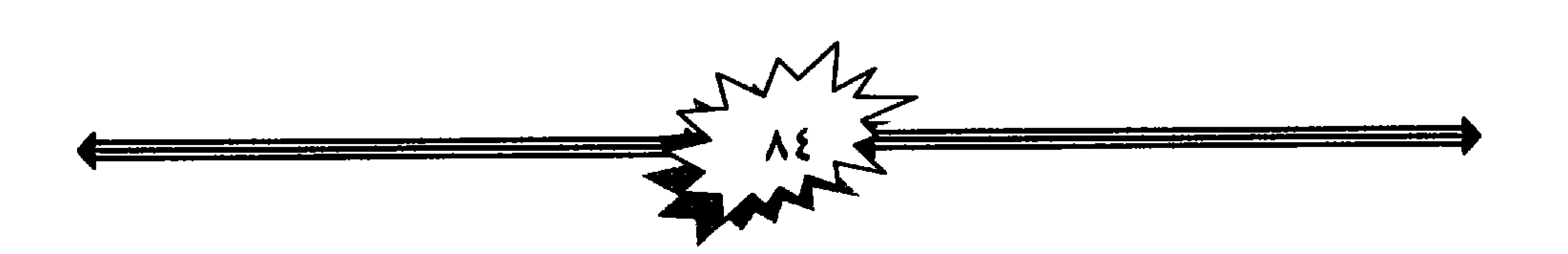
٣) إذا كان لدينا المصفوفتين ب$_{م×ن}$، أ$_{م×ن}$ وكذلك جـ$_{ن×ل}$ فإن (أ + ب) جـ = أ. جـ + ب.جـ

٤) إذا كان جـ$_{م×ن}$ وكان أ$_{ن×ل}$، ب$_{ن×ل}$

٥) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ن×م، المصفوفة ب من الرتبة ل×ن وكان ك, ر∋ح فإن

أ) أ (ك ب) = (ك.أ) .ب = ك (أ.ب)

ب) (ك.أ) (ر.ب) = (ك ر) (أ.ب)



٦) إذا كان ٠ = أ، أ ب = أ جـ فقد لا يكون ب = جـ

مثال (٢٦-١): إذا كان لدينا

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \qquad \text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

أوجد ب.أ؟

الحل:

$$\text{ب.أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١.٤ + ٤.(١-) & ١.٠ + ٤.٠ \\ ٠.٤ + ٠.(١-) & ٠.٠ + ٠.٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه على الرغم من أن كلاً من ب $\neq$ ٠، أ $\neq$ ٠ إلا أن أ.ب = ٠

مثال (٢٧-١): لتكن: $-\text{أ} = \begin{bmatrix} ١- & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ١- & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ & ١- \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد جـ . (ب.أ)، أ (ب.جـ) ثم ماذا تستنتج؟

الحل:

نبدأ بإيجاد

$$\text{أ.ب} = \left(\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

(أ.ب) جـ =

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ١- & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢- & ٦- & ٠ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ١- & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ & ١- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \text{ب. جـ}$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١- & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١- & ١- \\ ٦ & ٣- & ٢ & ٣- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١- & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١- & ١- \\ ٦ & ٣- & ٢ & ٣- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{أ. (ب. جـ)}$$

$$\begin{bmatrix} ١٢- & ٦- & ٠ & ٦ \\ ٢- & ٢ & ١- & ١ \end{bmatrix} =$$

نستنتج أن (جـ.ب) . أ = جـ. (ب.أ) أي أن ضرب المصفوفات يحقق الخاصية التجميعية.

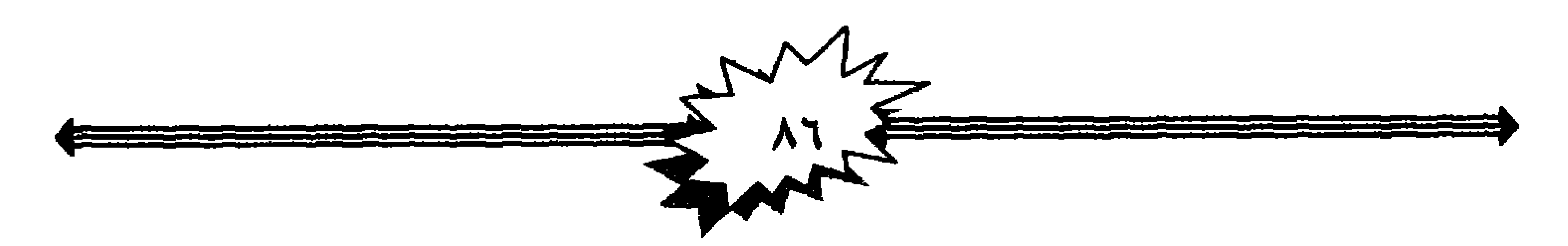
مثال (٢٨-١):

لتكن ب = $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة جـ التي تحقق العلاقة أ. جـ = جـ + ب

الحل:

بالنظر للطرف الأيمن نلاحظ أن رتبة المصفوفة ب هي ١×٢ وحتى يمكن جمعها مع المصفوفة جـ لا بد أن تكون رتبة المصفوفة جـ نفس رتبة المصفوفة ب أي أن رتبة المصفوفة جـ هي ١×٢ أيضاً وعليه سنفرض أن: ج = $\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{أ + ٣ ب} \\ \text{-٢أ + ب} \end{bmatrix} \Longleftarrow \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \text{أ.ج=ج+ب}$$



$= \begin{bmatrix} أ + ٦ \\ ب + ٣ \end{bmatrix}$ ومن تساوي المصفوفتين فإن:

أ + ٣ب = أ + ب ⟸ ٣ ب = ٦ ⟸ ب =٦

-٢أ + ب = ب + ٢ ⟸ -٢أ = ٢ ⟸ أ = -١ وعليه فإن المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

مثال (٢٩-١): حل المعادلة المصفوفة التالية ٠= س - $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ -٤

الحل: تنقل الثوابت في طرف ونبقي المجهول في طرف آخر:

$$س = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} - ٤ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١.١+١.٣ & -١.٠+١.٢ \\ ٢.١+١.٣ & ٢.٠+١.٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}.$$

(٥-١): قوى المصفوفة المربعة Power of Square Matrix

تختلف قوى المصفوفات عنها في الأعداد الحقيقية وسنرى ذلك من خلال الأمثلة ونبدأ بإعطاء التعريف التالي:

تعريف (١٦-١):

إذا كانت المصفوفة أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن وكان ك$\in$ط$^+$ فإن قوى المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب يمكن كتابتها على الصورة التالية:



$أ^{٠} = I_{ن}$ ، $(أ)^{١} = أ$، $(أ)^{٢} = أ.أ$، $أ^{٣} = أ.(أ)^{٢}$ .... $(أ)^{ك} = أ.(أ)^{ك-١}$

مثال (٣٠-١): إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$ **فأوجد** $(أ)^{١٩٨٦}$

الحل:

$أ^{٢} = أ.أ =$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩+٠ & ٦-٦ \\ ٠+٠ & ٠+٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} = ٩.\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٩$$

ولكون:

$$I^{ن} = ١ ،\ I = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

فإن:

$$(أ)^{١٩٨٦} = (أ^{٢})^{٩٩٣} = ٩^{٩٩٣} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}^{٩٩٣} = ٩^{٩٩٣} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} (٣^{٢})^{٩٩٣} .١ = ٣^{١٩٨٦}$$

مثال (٣١-١): إذا كان لدينا أ= $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ **أوجد** $أ^{١٢}$

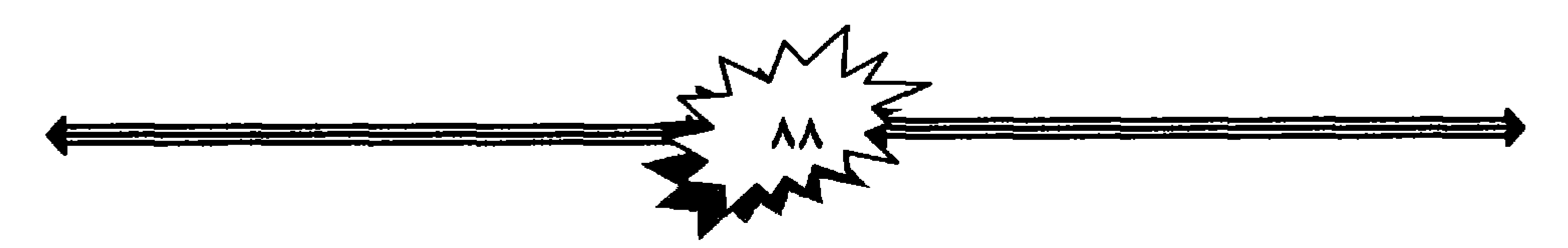
$$أ^{٢} = أ.أ = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+٢ & -١+١ \\ ٢-٢ & ٢+١ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} ٣ . \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٣ . ١ = ٣$$

وعليه فإن $٣^{٦} = ١ . ٣^{٦} = ١^{٦} . ٣^{٦} = (أ^{٢})^{٦} = أ^{١٢}$

مثال (٣٢-١): إذا كانت عناصر المصفوفة

أ = $\begin{bmatrix} س & ص \\ ص & س \end{bmatrix}$ **أعداداً موجبة وكان مجموع عناصر المصفوفة** $أ^{٢}$ **يساوي ٩٨ أوجد ص + س**



$$(أ)^{٢} = أ.أ = \begin{bmatrix} س & ص \\ ص & س \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س & ص \\ ص & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^{٢} + ص^{٢} & ٢ س ص \\ ٢ س ص & س^{٢} + ص^{٢} \end{bmatrix}$$

$$س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص + س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص = ٩٨$$

وعليه فإن مجموع الحدود:

$$٢(س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص) = ٩٨ \Longleftarrow س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = ٤٩ \Longleftarrow (س+ص)^{٢} = ٤٩$$

$$\Longleftarrow س + ص = ٧$$

مثال (٣٣-١): إذا كان:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$ أثبت أن $\forall$ ن $\in$ ط* $$(أ)^{ن} = \begin{bmatrix} ٢^{ن} & ٠ \\ ن.٢^{ن-١} & ٢^{ن} \end{bmatrix}$$

الحل: ستثبت ذلك باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي وذلك بإتباع الخطوات السابقة.

أولاً: نثبت صحة العبارة ل(١) أي عندما ن = ١

$$(أ)^{١} = \begin{bmatrix} ٢^{١} & ٠ \\ ١.٢^{٠} & ٢^{١} \end{bmatrix} \Longleftarrow أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$ = ١ أي أن العبارة صحيحة عندما ن.

ثانياً: نفرض صحة العبارة ن = ك أي أن $$(أ)^{ك} = \begin{bmatrix} ٢^{ك} & ٠ \\ ك.٢^{ك-١} & ٢^{ك} \end{bmatrix}$$



ثالثاً: نثبت صحة العبارة عندما

ن = ك + ١ أي أن $(A)^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ (k+1)\,2^{k} & 2^{k+1} \end{bmatrix}$

لذا نضرب ما فرضناه في ثانياً ولكلا الطرفي في أ أي:

$$A^{k} \cdot A^{1} = \begin{bmatrix} 2^{k} & 0 \\ k.2^{k-1} & 2^{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ k2^{k}+2^{k} & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ (n+1).2^{k} & 2^{k+1} \end{bmatrix}$ أي أن العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١

مثال (٣٤-١): لدينا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ وكان ق(س) = س^{2} – ٣س + ٤

وبوضع أ بدلاً من س أوجد المصفوفة ق(أ)

الحل: بوضع أ بدلاً من س فإن: ق(أ) = (أ)^{2} – ٣ (أ) + ٤.أ

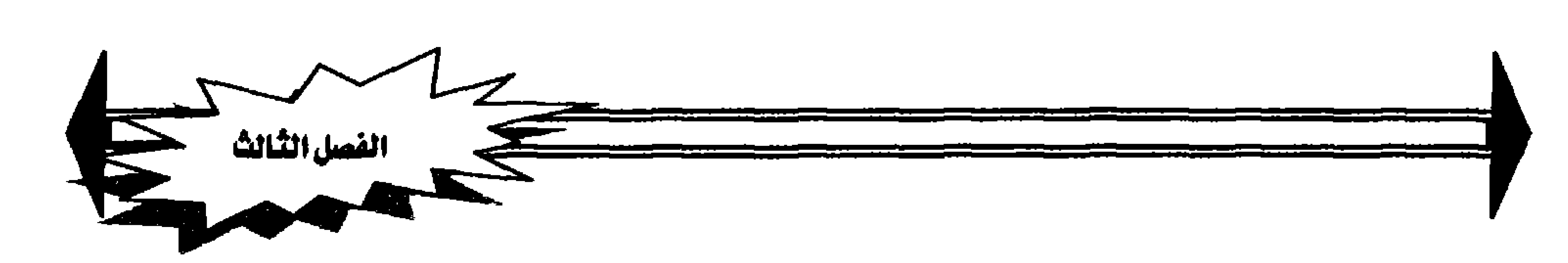
$$A^{2} = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2+0 \\ -1+0 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$q(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

٦-١ مبدول المصفوفة Transpose of Matrix

لقد سبق وأن تعرضنا إلى مفهوم المبدول للمصفوفة من خلال أنواع المصفوفات والآن سنتوقف عند هذا المفهوم مرة أخرى لنتناول الأمثلة والخصائص ونبدأ بإعطاء التعريف التالي:



تعريف (١٧-١):

يقال للمصفوفة الناتجة من تبديل صفوف المصفوفة أ = [أ$_{ji}$]$_{م×ن}$ بأعمدة المصوفة بمبدول المصفوفة أ وسنرمز لها بالرمز A^t = [أ$_{ji}$]$_{ن×م}$ أو قد نرمز للمبدول بالرمز أَ.

مثال (٣٥-١):

لدينا المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

أوجد مبدول (أ)، مبدول (ب) أو أَ ، بَ.

الحل:

حسب التعريف فإن مبدول (أ) = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ مبدول ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

نظرية (٤-١):

١) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ن×م فإن أ = مبدول (مبدول أ)

٢) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ن × م؛ ك∈ح ⟸ (ك أ)َ = ك أَ

أو مبدول (ك أ) = ك مبدول (أ).

٣) إذا كان ب، أ مصفوفتان من الرتبة ن×م فإن مبدول (أ + ب) = مبدول (أ) + مبدول (ب).

٤) إذا كان لدينا المصفوفتان أ$_{م×ن}$ من الرتبة ن×م والمصفوفة ب$_{ن×ل}$ من الرتبة ل×ن فإن مبدول (أ×ب) = مبدل (ب) × مبدول (أ).



ملاحظة: لتكن المصفوفة $أ_{ن×ن}$ فإنه يقال للمصفوفة التي فيها مبدول (أ) = أ بالمصفوفة المتماثلة **Symmetric Matrix**

أما إذا كان أ = − مبدول (أ) فإننا نقول للمصفوفة أ بالمصفوفة المتماثلة عكسياً Anti – Symmetric Matrix والآن سنتناول أمثلة توضيحية لذلك.

مثال (١-٣٦): إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ب= $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

تحقق من صحة الخاصية مبدول (أ + ب) = مبدول (أ) + مبدول (ب)

الحل:

أ + ب = أ= $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

مبدول (أ+ب) = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ مبدول (أ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ مبدول (ب) =

$\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ⟸ مبدول (أ) + مبدول (ب) = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$.

نلاحظ أن مبدول (أ + ب) = مبدول (أ) + مبدول (ب) وهو المطلوب.

مثال (١-٣٧): إذا كان لدينا المصفوفتان

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ أثبت أن مبدول (أ.ب) = مبدول ب. مبدول أ

الحل:

أ.ب= $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠+٦ & ١٦+٢- \\ ١٥+٠ & ١٢+٠ \end{bmatrix}$ =

$$\begin{bmatrix} ٢٦ & ١٤ \\ ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$$

مبدول (أ.ب) = $\begin{bmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ١٥ & ٣٦ \end{bmatrix}$ مبدول (ب) = $\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

مبـــــدول (أ) = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ⟸ مبـــــدول (ب). مبـــــدول (أ) =

$\begin{bmatrix} ١٢+٠ & ١٦+٢- \\ ١٥+٠ & ٢+٦ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ١٥ & ٢٦ \end{bmatrix}$

مثال (٣٨-١): إذا كان لدينا

أ = $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ ب= $\begin{bmatrix} ١٧ & ٢٩ \\ ١٠ & ١٧ \end{bmatrix}$ وعلى اعتبار أن:

أ. مبدول (أ) = ب أوجد قيمة الزوج المرتب (س، ص)

الحل:

أ. مبـــــدول (أ) = $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ص & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & س \\ ص & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} س+٥ص & س^{٢}+٢٥ \\ ١+ص^{٢} & س+٥ص \end{bmatrix}$ =

$\begin{bmatrix} ١٧ & ٢٩ \\ ١٠ & ١٧ \end{bmatrix}$ ومن تساوي المصفوفتان نستطيع كتابة.

س^{٢} + ٢٥ = ٢٥ ⟸ س^{٢} = ٤ ⟸ س = ٢   س + ٥ص = ١٧

١ + ص^{٢} = ١٠ ⟸ ص^{٢} = ٩ ⟸ ص = -٣

وهنا وحتى تتحقق المعادلة الأخيرة فإن القيمة الموجبة لكـل مـن س، ص هي التي فقط تحقق المعادلة الأخيرة لذا فإن الحل م(-٣، ٢) هو الحل الوحيد.



أمثلة إضافية:

مثال (٣٩-١):

لدينا المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \text{جـ} \quad \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١- & ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١- & ٣ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد أ جـ + ب جـ

الحل: أ جـ + ب جـ = (أ + ب) جـ

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١- & ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١- & ٣ \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٨ \\ ٣ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix} =$$

مثال (٤٠-١): لدينا المصفوفات التالية

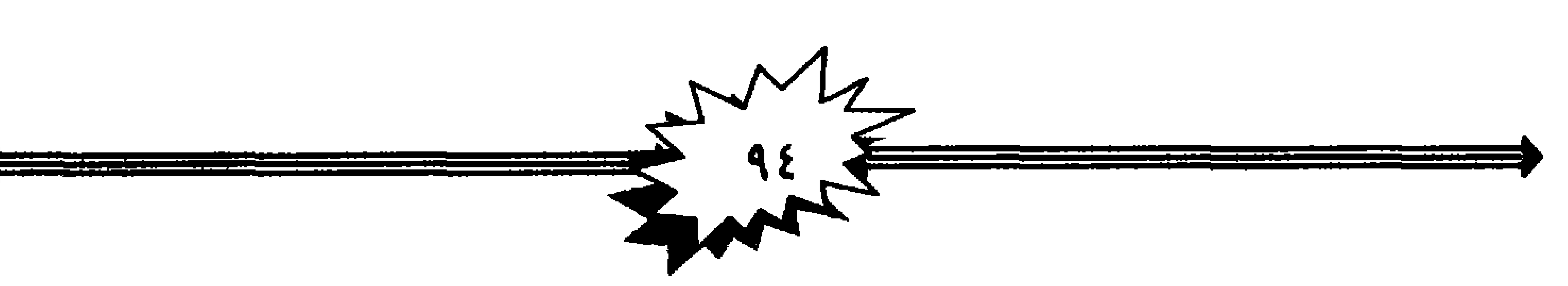
$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \text{مبدول (جـ)} \quad \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد جـ . (ب.أ)، مبدول (جـ) . (مبدول (ب) . مبدول (أ))

الحل:

$$= \begin{bmatrix} ١.(١-)+٠.١ & (١-).(١-)+١.١ \\ ١.١ +٠.٠ & (١-).١ +١.٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{أ.ب}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$$



مبدول (مبدول (جـ)) ⟸ جـ ⟸ جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

(أ . ب) جـ = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

(مبدول (أ) . مبدول (ب)) . مبدول (جـ) =

$\left(مبدول \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} . مبدول \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

$= \left(\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

مثال (١-٤١): على اعتبار أن:

$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص & س \\ ص & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$ **أوجد قيمة س+ص**

الحل:

$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص & س \\ ص & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ص+٢ص & س \\ -ص+٣ص & -س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٣ص & س \\ ٢ص & -س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$ ⟸ س = ٢، ٣ص = ٣ ⟸

س= ٢، ص = ١

⟸ س + ص = ٢ + ١ = ٣



مثال (٤٢-١): لدينا المصفوفتان: $أ = \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٠ & ص \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

وعلى اعتبار أن أ. مبدول (أ) = ب أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$ ؟

الحل: $أ = \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٠ & ص \end{bmatrix} \Longleftarrow$ مبدول (أ) $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ س & ص \end{bmatrix}$.

أ. مبـــــــــــدول (أ) = ب $\Longleftarrow \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٠ & ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ س & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} \Longleftarrow$

$$\begin{bmatrix} ١+س^{٢} & س ص \\ س ص & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين $١ + س^{٢} = ١٠$، س ص = ٦، $ص^{٢} = ٤$

وبحل المعادلات نجد أن س = -٣، ص = -٢ $\Longleftarrow \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

لأننا هنا نأخذ فقط قيم س، ص الموجبة أو السالبة حتى تحقق المعادلة الثالثة.

مثال (٤٣-١): بالاستفادة من المتطابقات المثلثية احسب قيمة

$$جتاس \begin{bmatrix} جتاس & -جاس \\ جاس & جتاس \end{bmatrix} + جاس \begin{bmatrix} جاس & جتاس \\ -جتاس & جاس \end{bmatrix}$$

الحل: $جتا \begin{bmatrix} جتاس & -جاس \\ جاس & جتاس \end{bmatrix} + جاس \begin{bmatrix} جاس & جتاس \\ -جتاس & جاس \end{bmatrix} = أ$

$$أ = \begin{bmatrix} جتا^{٢}س & -جاس جتاس \\ جاس جتاس & جتا^{٢}س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} جا^{2}س & جاس جتاس \\ -جاس جتاس & جا^{2}س \end{bmatrix}$$



$$\Leftarrow \begin{bmatrix} \text{جاجتا}^2\text{س+جا}^2\text{س} & \text{-جاس جتاس+جاس جتاس} \\ \text{جاس جتاس-جاس جتاس} & \text{جتا}^2\text{س+جا}^2\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٤٤-١): احسب قيمة س، ص التي تحقق المعادلة التالية:

$$\text{س} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix}$$

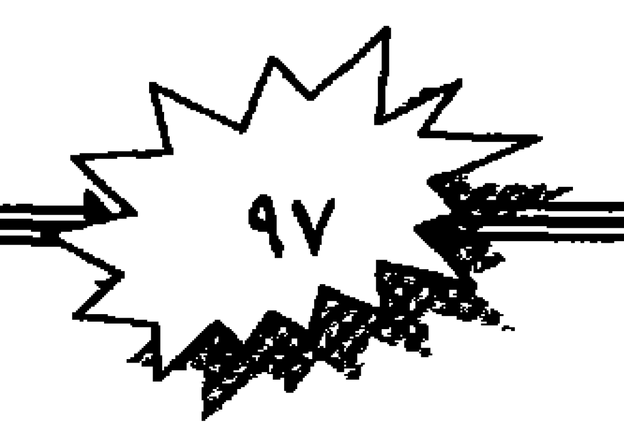
الحل:

$$\text{س} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -\text{س} \\ 2\text{س} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} + 3\text{ص} \\ 5\text{س} + 0\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -\text{س} + \text{س} + \text{س} + 3\text{ص} \\ 2\text{س} + 5\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3\text{ص} \\ 7\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Leftarrow$$

٣ص = ٦، ٧ س = ٢١. $\Leftarrow$ ص = ٢، س =٣ $\Leftarrow$ (س، ص) = (٣، ٢).



تمارين عامة

س١) علـــــى اعتبـــــار أن $\begin{bmatrix} \text{٢س} & \text{ص} & \text{-ع} \\ \text{س} & \text{-ص} & \text{٢ع} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{٦} & \text{-٢} & \text{ص} \\ \text{-٥} & \text{١١} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ت} & \text{٤} & \text{-١} \\ \text{ع} & \text{٥} & \text{٣ع} \end{bmatrix}$ أوجد قيمة س + ص.

س٢) إذا كان $\begin{bmatrix} \text{م} & \text{س} \\ \text{-س} & \text{٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{-٢} \\ \text{١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١٠} \\ \text{٧} \end{bmatrix}$ أوجد قيمة م.

س٣) إذا كان $\begin{bmatrix} \text{م} & \text{١} \\ \text{جـ} & \text{١} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{١} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{-د} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٧} & \text{٤} \\ \text{٩} & \text{٦} \end{bmatrix}$ أوجد قيمة ب + د

س٤) إذا كان س $\begin{bmatrix} \text{-٣} \\ \text{٢} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{-١} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{١} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ص} \\ \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-٥} \\ \text{٤} \end{bmatrix}$ أوجد قيمـة س + ص.

س٥) أوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة س − ٣ $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٢} \\ \text{-١} & \text{١} \end{bmatrix}$ + ٥ = ٠

س٦) إذا كـــان ٢ م + ب = $\begin{bmatrix} \text{م} & \text{م} & \text{ب}^* \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ أ = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٤} & \text{٥} & \text{٦} \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{-١} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{٠} & \text{-٢} \end{bmatrix}$ أوجد مجموع أ + ب* + جـ.

س٧) لدينا المصفوفات

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{جاس} \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{-١} \\ \text{١} & \frac{\text{-١}}{\text{٢}} \end{bmatrix}$$

جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & \sqrt{٣} \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ وعلى اعتبار أن أ + ب = جـ أوجد قيمة س؟

س٨) إذا كان $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١ & \text{م} \\ \text{ب} & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix}$ أوجد قيمة ص − س.

س٩) لـدينا المـصفوفات التاليـة جـــ = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

ب= $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ د = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$.

أوجد ناتج ما يلي إن أمكن أ . ب، ب . جـ، أ . جـ، د . جـ مع ذكر سبب عدم الإمكانية.

س١٠) أوجد قيم س، ص التي تحقق العلاقة التالية:

مبدول $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & \text{س} \\ \text{س} & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ + مبدول $\begin{bmatrix} \text{ص} & -\text{س} & ٣ \\ -\text{س} & \text{ص} & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

س١١) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -٦ & ٦ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة $(\text{أ})^{٥}$.

س١٢) لدينا المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ب= $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ أوجد أ . $\text{ب}^{٢}$.

س١٣) لدينا المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ= $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أوجد أ . ب + $\text{جـ}^{٢}$ ؟



س١٤) لدينا المصفوفتان:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$$

ب= $\begin{bmatrix} ٤ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة جـ التي تحقق العلاقة أ . جـ = جـ + ب

س ١٥) لدينا المصفوفات التالية:

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & س - ص \\ ص - ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

ب = $\begin{bmatrix} ٦ & س - ٢ \\ ٦ - ص & ٣ \end{bmatrix}$ ، $٠ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ إذا كان مبدول (ب) − ٣(أ) = ٠

أوجد قيمة س.

س١٦) لدينا المصفوفات جـ = $\begin{bmatrix} ٢.٣^{س} & \sqrt{١٨} \\ ٢ & لو_{٤}\,٨ \end{bmatrix}$ أوجد حاصل ضرب س . ص والذي يحقق المتساوية أ . ب = جـ حيث س، ص $\in$ ح.

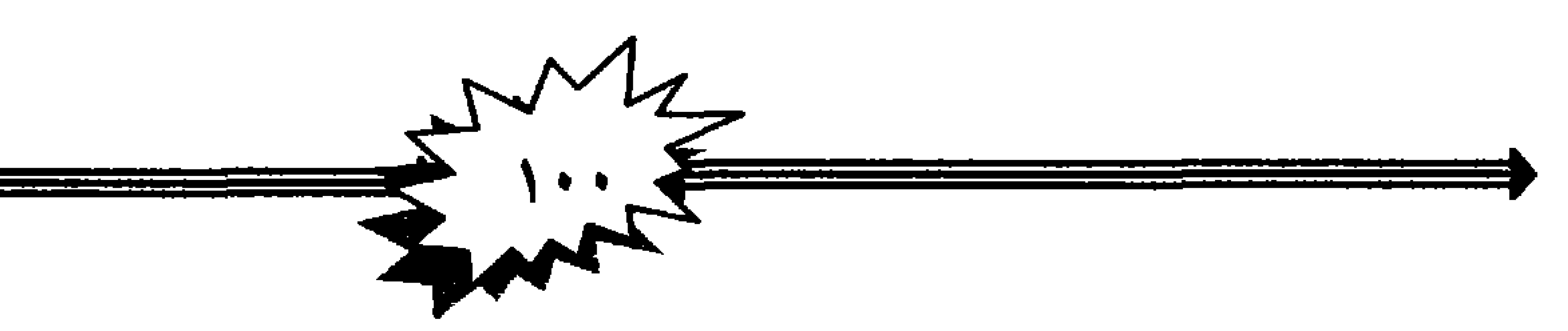
س١٧) لدينا المصفوفتان

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & جا\ س & جتا\ س \\ ٠ & جتا\ س & جا\ س \end{bmatrix}$$

ب= $\begin{bmatrix} جتاس \\ جاس \\ ١- \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة مبدول (أ . ب)؟

س١٨) متتالية حسابية حدودها مصفوفات مربعة من الرتبة ٢ × ٢ حدها الثالث

$$أ_{٣} = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \qquad أ_{٧} = \begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٨- & ٧ \end{bmatrix}$$



أوجد أساس هذه المتتالية؟

س١٩) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية أ = $\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ وكان أساسها

ك = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ أوجد الحد الرابع من هذه المتتالية؟

س٢٠) لدينا المصفوفات

أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢\text{لو}_{٢}\text{س} \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٤ & ٢\text{ص}+١ \end{bmatrix}$

وعلى اعتبار أن ٢أ – ٣ب = جـ أوجد قيمة س + ص؟

أسئلة موضوعية

س١) لدينا المصفوفات

أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ= $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

فإن قيمة أ . ب + جـ^{٢} ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١٤ & ٨ \\ ١٦ & ٣ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -٢ & -٨ \\ ٢٤ & ١٥ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ١٩ & -٨ \\ ٣٢ & ٣٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} ١٩ & -٧ & ٤ \\ ١٢ & ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$

س٢) لدينا المصفوفتان

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$

ب= $\begin{bmatrix} ٤ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة جـ التي تحقق أ . جـ = جـ + ب هي

أ) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

س٣) لدينا المصفوفات التالية أ = $\begin{bmatrix} س - ص & ١ \\ ٢ & ص - ٢ \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} س - ٢ & ٦ \\ ٣ & ٦ - ص \end{bmatrix}$ ، ٠ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ وإذا كان مبدول (ب) − ٣(أ) = ٠

فإن قيمة س:

أ) ٤ ب) $\frac{٧}{٢}$ ج) ٣ د) $\frac{٥}{٢}$ هـ) ٢

س٤) لدينا المصفوفتان:

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

ب= $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ فإن قيمة مبدول (أ . ب) هي:

أ) $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}$

س٥) لدينا المصفوفتين:

أ = $\begin{bmatrix} جتا\ س & جا\ س & ١ \\ جا\ س & جتا\ س & ٠ \end{bmatrix}$ ب= $\begin{bmatrix} جتاس \\ جاس \\ -١ \end{bmatrix}$ إن قيمة المصفوفة س التي

تحقق العلاقة أ . مبدول (س) = ب هي:

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٠ & جا٢س \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} جا٢٠س \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} جا٢س & ١ \end{bmatrix}$



س٦) لـدينا المـصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فقـد كـان مجمـوع عناصـر المـصفوفة $أ^{ن}$ يساوي ١٦ فإن قيمة ن هي:

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١٢ د) ١٤ هـ) ١٦

س٧) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $أ^{ك}$ = $\begin{bmatrix} 512 & 0 \\ 0 & -512 \end{bmatrix}$ فإن قيمة ك هي:

أ) ٨ ب) ٩ جـ) ١٠ د) ١١ هـ) ١٢

س٨) لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة $أ^{10}$ هي

أ) 2^{9} . أ ب) 2^{10} . أ جـ) 2^{18} . أ

د) 3^{9} . أ هـ) 3^{10} . أ

س٩) إن رتبة المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ هي

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١ هـ) ٠

س١٠) حتى تكون رتبة المـصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س & -2 & 6 \\ 6 & 4 & -12 \end{bmatrix}$ تـساوي ١ فـإن قيمة س هي:

أ) -٦ ب) -٣ جـ) -٢ د) ٢ هـ) ٣

س١١) إذا كان ص > ٠ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & س \\ ص & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

أ. مبدول (أ) = $\begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٢٦ & س \end{bmatrix}$ ⟸ س + ص =

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤ هـ) ٥

س١٢) لدينا أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ أ . مبـــــدول (س) = ب فإن قيمة المصفوفة س هي:

أ) $[\,٢ \quad -٣\,]$ ب) $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

جـ) $[\,-٢ \quad ٣\,]$ د) $[\,٣ \quad -٢\,]$ هـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٣ \end{bmatrix}$

س١٣) لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$ ⟸ $أ^{١٠}$ =

أ) $٢^{٩}$. أ ب) $٢^{١٠}$. أ

جـ) $٢^{١٨}$. أ د) $٣^{٩}$. أ هـ) $٣^{١٠}$. أ

س١٤) لدينا المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ن ∈ $ص^{+}$ ⟸ $أ^{٤ن + ٣}$ =

أ) ١ ب) -١

جـ) أ د) -أ هـ) ٢أ



س١٥) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ق (س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ⟸ ق(أ) =

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٦ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$

س١٦) باستخدام المصفوفات التالية:

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ فإن نظام المعادلات الناتج هو

أ) ٢س + ص = −١ ، س+ص=٥

ب) ٢س + ص =١ ، س−٣ص=٥

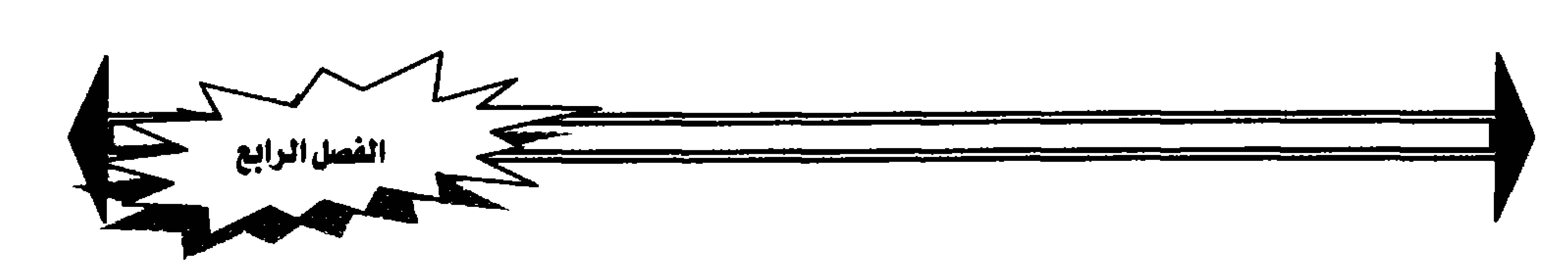
جـ) ٢س − ص = −١ ، س+٣ص=٥

د) ٢س + ص = −١ ، س −٣ ص = ٥

هـ) ٢س + ص =١ ، − س +٣ص = −٥



المتتاليات والمتسلسلات العددية



الفصل الرابع

المتتاليات والمتسلسلات العددية

ستتعرف الآن أبسط الكيانات التحليلية في علم التحليل الرياضي والتي لها تطبيقات مختلفة في كثير من الفروع الرياضية والفيزيائية والكيميائية.

تعريف المتتالية العددية :

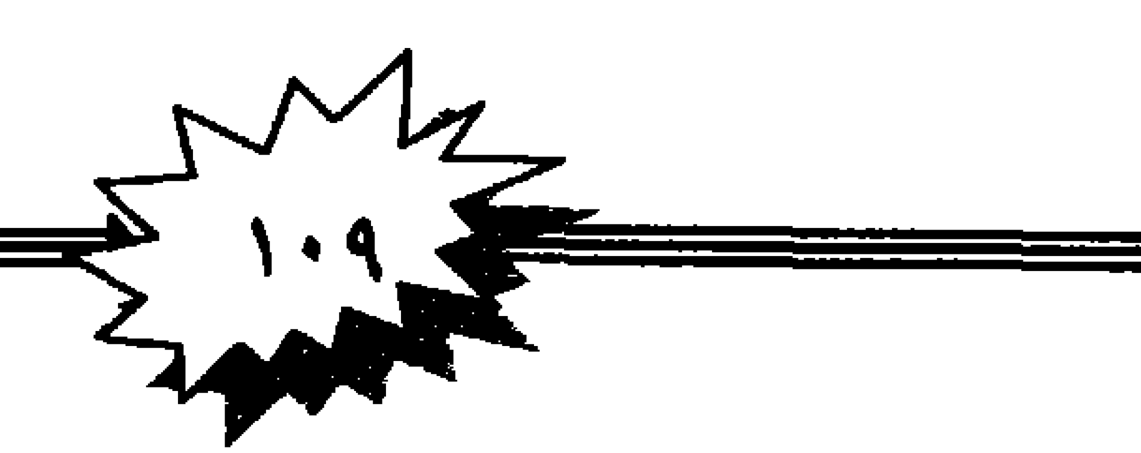
هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية ط ومستقرة مجموعة أخرى. ونقول أن المتتالية العددية حقيقية إذا كان مستقرها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ويمكن ترميزها عندئذ بالشكل $\{أ_ن\}$ ظ ⟵ ح أما إذا كانت هذه المتتالية مستقرها مجموعة الأعداد العقدية = التخيلية فإننا نسميها متتالية عقدية أو تخيلية ونكتب ⟵ ط : $\{Z_ن\}$ ستعامل في هذا الكتاب مع متتاليات عددية حقيقية فقط ويتم تعريف المتتالية بواسطة ثلاثة طرق أساسية:

١- طريق الحد النوني- الحد العام- في هذه الطريقة تعطى قاعدة ربط للمتتالية مثل $أ_ن = \frac{ن}{ن+١}$ وعندها تصبح مجموعة قيم هذه المتتالية:

$$\{أ_ن\} = \{ أ_١ = \frac{١}{٢}،\ أ_٢ = \frac{٢}{٣}،\ ....\}.$$

$$\{أ_ن\} = \{\frac{١}{٢}،\ \frac{٢}{٣}،\ \frac{٣}{٤}،\ ....\}.$$

٢- طريقة السرد: تعطى بهذه الطريقة المتتالية على شكل مجموعة مرتبة مثل:





$\{أ_ن\}$ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣..........} وهـي متتاليـة الأعداد الأولية.

ومن الجدير بالذكر أنه لا يمكن في الحالة العامة كتابـة هـذه المتتاليـة بطريقة الحد النوني.

٣- طريق الحد الضمني: تعطى بهذه الطريقة المتتالية بواسطة علاقة بين حدود لاحقة وحدود سابقة، مثال $أ_{ن+١}$ = ٢ + $أ_ن$.

في هذه الحالة وحتى نستطيع التعريف عن المتتالية بشكل كامل لا بـد مـن وضع حدود ابتدائية معروفة مثل $أ_١$ فيصبح لدينا ما يلي:

إذا فرضنا $أ_١$ = ٢ عندئذ نستطيع استنتاج حدود المتتالية جميعها من قاعدة الحد الضمني

$أ_٢$ = $أ_١$ + ٢ = ٢ + ٢ = ٤

$أ_٣$ = ٢ + $أ_٢$ = ٢ + ٢ + $أ_١$ = ٣ . ٢ = ٦

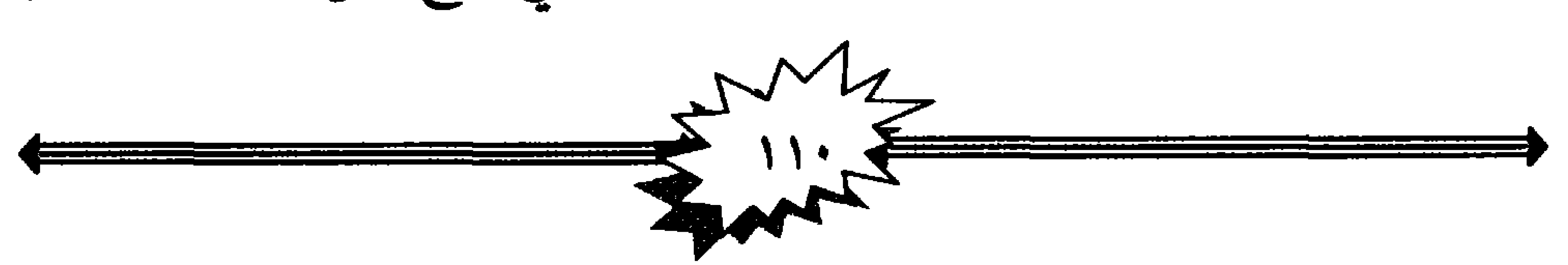
$أ_٤$ = $أ_٣$ + ٢ = ٤ . ٢ = ٨

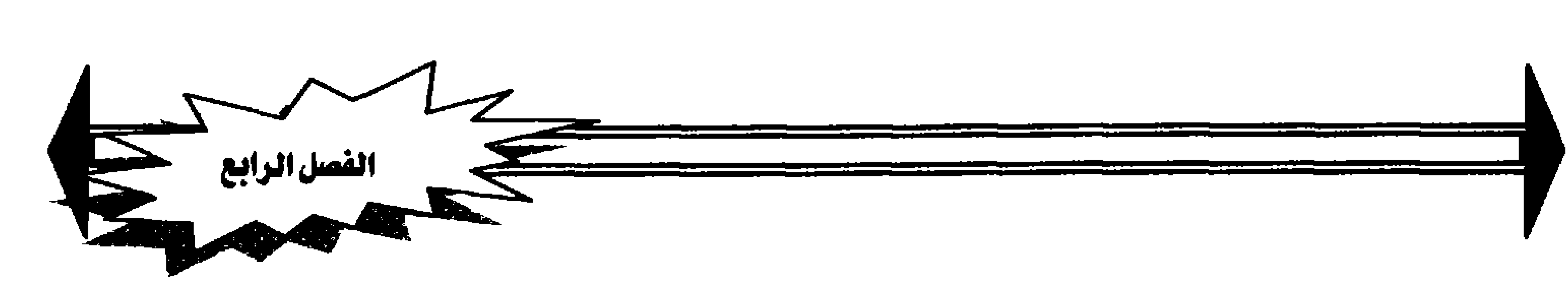
وهكذا وبالتالي $\{أ_ن\}$ = {٢، ٤، ٦، ٨، ....} وهي متتالية الأعـداد الزوجية ويمكن في الحالة العامة إيجـاد حـد نـوني لهـذه المتتاليـة بطـرق حـسابية بسيطة.

متتاليات خاصة:

أولاً: المتتالية الحسابية:

أ- تعريف: تعرف المتتالية الحسابية بأنها المتتالية التي ينتج كـل حـد فيهـا عـن





الحد الذي قبله بإضافة عدد ثابت ونقول عن هذا العدد الثابت بأنه أساس المتتالية الحسابية ونرمز له بـ جـ.

وبالتالي كأننا نعرف المتتالية الحسابية بقاعدة ضمنية وذلك بالشكل:

$$\text{أ}_{\text{ن}+١} = \text{أ}_{\text{ن}} + \text{جـ}$$

الآن إذا أردنا حساب الحد النوني لهذه المتتالية عندئذ نكتب: $\text{أ}_{٢} = \text{أ}_{١} + \text{جـ}$

$$\text{أ}_{٣} = \text{أ}_{٢} + \text{جـ} = \text{أ}_{١} + ٢ \,.\, \text{جـ}$$

$$\text{أ}_{٤} = \text{أ}_{٣} + \text{جـ} = \text{أ}_{١} + ٣ \,.\, \text{جـ}$$

وهكذا حتى نصل إلى $\text{أ}_{\text{ن}} = \text{أ}_{١} + (\text{ن} + ١)\,\text{جـ}$

وبالتالي حتى تكون هذه المتتالية معرفة تعريفاً وحيداً يجب معرفة الحد الأول $\text{أ}_{١}$ وأساس هذه المتتالية جـ

مثال: أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية المعطاة بالشكل:

$$\{\text{أ}_{\text{ن}}\} = \{٣،\ ٥،\ ٧،\ \ldots\ldots\ldots\}.$$

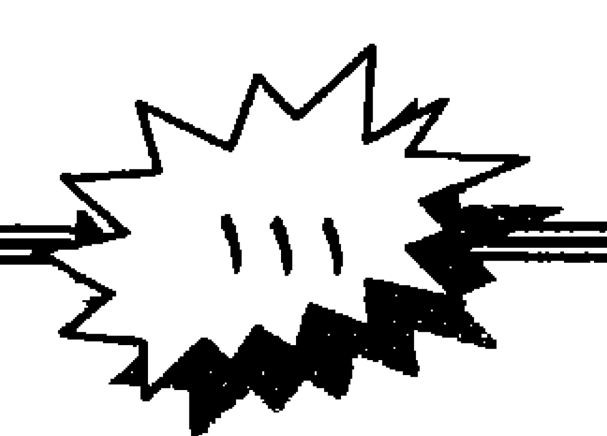
الحل: بملاحظة أن $\text{جـ} = \text{أ}_{١} + ١ - \text{أ}_{\text{ن}} = ٥ - ٣ = ٢$ ولدينا أيضاً $\text{أ}_{١} = ٣$ عندئذ فإن

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \text{أ}_{١} + (\text{ن} - ١)\,\text{جـ} = ٣ + (\text{ن} - ١) \,.\, ٢ = ٢\text{ن} - ٢ + ٣ = ٢\text{ن} + ١$$

وهذه المتتالية تسمى متتالية الحدود الفردية.

ب- تعريف متتالية المجاميع الجزئية للمتتالية الحسابية: ونرمز لها بـ $\text{جـ}_{\text{ن}}$ وتعرف بالشكل:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{أ}_{\text{ن}}.$$



الآن إذا أردنا كتابة حد عام لهذه المتتالية نلاحظ أن:

$$جـ_ن = أ_١ + (أ_١ + جـ) + \dots\dots\dots + (أ_١ + (ن - ١) . جـ)$$

$$= ن . أ_١ + [جـ + ٢ . جـ + \dots + (ن-١) . جـ]$$

$$= ن . أ_١ + جـ [١ + ٢ + \dots + (ن-١)]$$

الآن من أجل المقدار $ب = ١ + ٢ + \dots\dots\dots + (ن-١)$

لنلاحظ أن:

$$\left.\begin{array}{l} ب = ١ + ٢ + \dots\dots (ن-١) \\ ب = (ن-١) + (ن-٢) + \dots\dots + ١ \end{array}\right\} \Longrightarrow ٢ب = ب + ب$$

$$= ن + ن + ن + \dots\dots ن$$

$$= ن (ن-١).$$

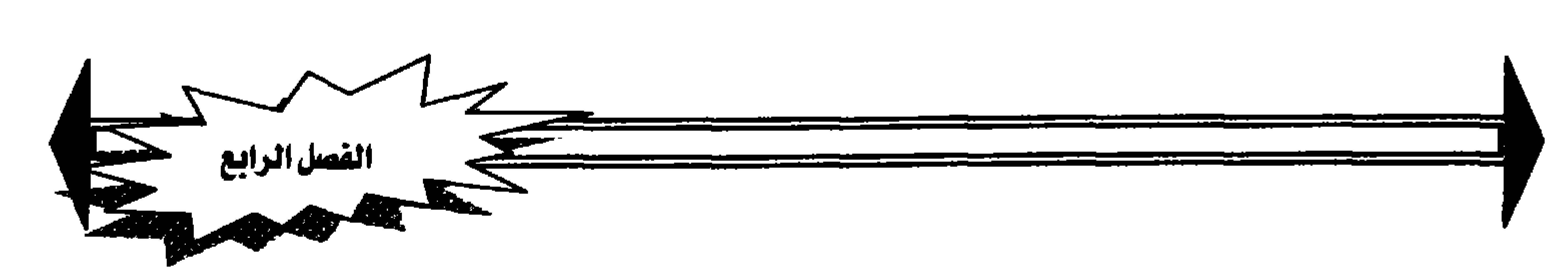
وبالتالي $ب = \frac{ن(ن-١)}{٢}$ والآن لنعود إلى $جـ_ن$ فنجد أن $جـ_ن = ن . أ_١ + جـ . \frac{ن(ن-١) جـ}{٢}$ وهو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية.

ويمكن أيضاً كتابته بالشكل $جـ_ن = ن [أ_١ + \frac{جـ(ن-١)}{٢}]$

مثال: بفرض المتتالية الحسابية التي حدها الأول $أ_١ = ٥$ وأساسها $جـ = ٣$ أوجد حدها العام ومجموعها حتى الحد العاشر.

الحل: بملاحظة أن الحد العام يعطى بالشكل $أ_ن = ٥ + (ن-١) . ٣$

$$\Longleftarrow أ_ن = ٣_ن + ٢$$



والحـد العـام لمتتاليـة المجـاميع الجزئيـة لهـا تعطـى بالعلاقـة: $ج_ن = ن [٥ + \frac{٣(ن-١)}{٢}]$ الآن إذا أردنا المجموع حتى الحد العاشر.

$$ج_{١٠} = ١٠ [٥ + \frac{٩\times٣}{٢}] = ١٠ [\frac{٣٧}{٢}] = ٥ \times ٣٧ = ١٨٥.$$

ثانياً: المتتالية الهندسية:

أ- تعريف: نعرف المتتالية الهندسية بأنها المتتالية التي ينتج كـل حـد فيهـا عـن الحد الذي قبله بضربه بعدد ثابت ونقول عن هذا العدد الثابت بأنه أساس المتتالية الهندسية ونرمز له بـ ر .

وكأننا الآن عرفنا هذه المتتالية بقاعدة ضمنية $أ_{ن+١} = ر . أ_ن$

وبالتالي إذا أردنا حساب حداً عاماً لهذه المتتالية نكتب:

$أ_٢ = ر . أ_١$ ، $أ_٣ = ر . أ_٢ = ر . أ_١$ ، $أ_٤ = ر أ_٣ = ر^٣ . أ_١$

$أ_ن = (ر)^{ن-١} . أ_١$

ويجب حتى يكون هذه المتتالية معرّفة بـشكل كامـل أن نعـرف أساسـها ر وحدها الأول $أ_١$.

مثال: اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية المعطاة بالشكل:

$\{أ_ن\} = \{٢، ٦، ١٨، ٥٤\}$.

الحل: بملاحظة أن

$أ_١ = ٢$ ، $ر = \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} = \frac{٦}{٢} = ٣$ عندئذ فإن $أ_ن = ٣^{ن-١} . ٢$

$= ٢ . ٣^{ن-١}$ وهو الحد العام للمتتالية الهندسية.





ب- سنعرّف الآن متتالية المجاميع الجزئية المنتهية للمتتالية الهندسية وسنرمز لها بالشكل $\sigma_ن$:

$$\sigma_ن = ﻡ_١ + \dots\dots\dots\dots ﻡ_ن$$

$$\sigma_ن = ﻡ_١ + ر . ﻡ_١ + \dots\dots\dots (ر)^{ن-١} . ﻡ_١$$

$$\sigma_ن = ﻡ_١ [١ + ر + ر^٢ + \dots\dots\dots (ر)^{ن-١}] \quad \Omega_١$$

الآن إذا ضربنا الطرفين بـ ر نجد أن:

$$ر . \sigma_ن = ﻡ_١ [ر + ر^٢ + ر^٣ \dots\dots\dots (ر)^ن] \quad \Omega_٢$$

$$ر \sigma_ن - \sigma_ن = ﻡ_١ (ر)^ن - ﻡ_١$$ الآن من $\Omega_١$ و $\Omega_٢$

$\sigma_ن (ر - ١) = ﻡ_١ (ر^ن - ١) \Longrightarrow \sigma_ن = \frac{ﻡ_١ [ر^ن - ١]}{[ر - ١]}$ وأخيراً يمكن كتابتها بالشكل

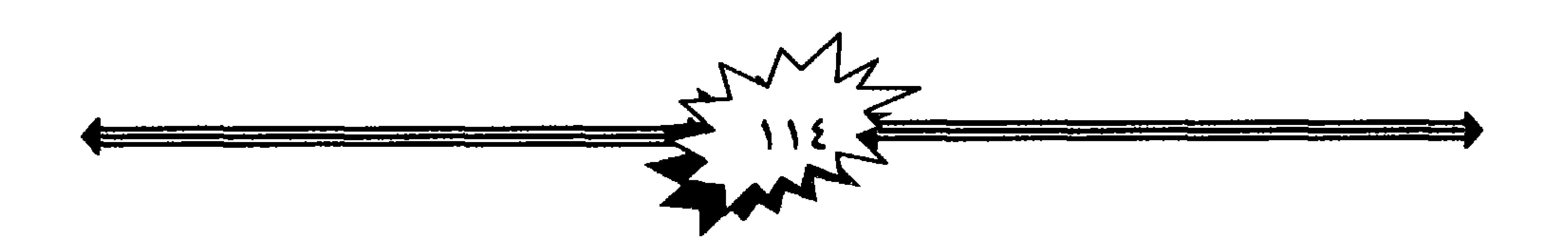
$\sigma_ن = ﻡ_١ \left[\frac{١ - ر^ن}{١ - ر} \right]$ أما من أجل $ر = ١$ فإن $\sigma_ن = \sum_{١}^{ن} ١ . ﻡ_١ = ﻡ_١ . ن$

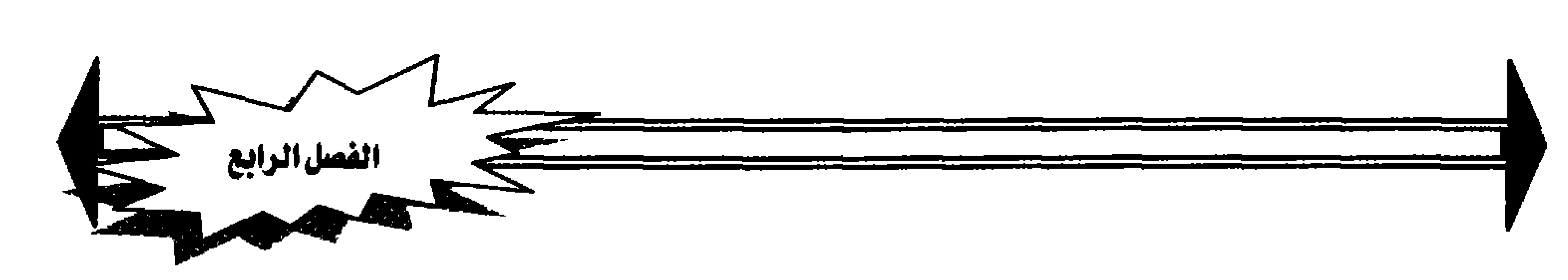
وهو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتتالية.

مثال: بفرض المتتالية الهندسية التي حدها الأول $ﻡ_١ = ٢$ وأساسها $ر = ٢$ أوجد حدها العام ومجموعها حتى الحد العاشر.

الحل: بملاحظة أن $ﻡ_ن = ﻡ_١ . (ر)^{ن-١} \Longrightarrow ﻡ_ن = ٢ . (٢)^{ن-١} = (٢)^ن$

وهو الحد العام لهذه المتتالية.





أما من أجل مجموعها حتى الحد النوني نكتب $\sigma_ن = ٢ . \left[\frac{١-٢^ن}{١-٢}\right] =$

$٢ . [٢^ن - ١] \Longleftarrow \sigma_ن = ٢^{ن+١} - ٢$

ومن أجل مجموعها حتى الحد العاشر نكتب $\sigma_{١٠} = (٢)^{١١} - ٢ = ٤٢ . ٢$ $- ٢ = ٤٠ . ٢$ وهو المطلوب.

المتتاليات المحدودة:

أ- تعريف: نقول عن المتتالية {أن} أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد مثل هـ بحيث:

E $ن_٠ = ن > ن_٠ \Longleftarrow ا_ن \leq هـ$

مثال: بملاحظة المتتالية $ا_ن = \frac{ن}{ن+١}$: $\{\frac{١}{٢}، \frac{٣}{٤}، \frac{٤}{٥}، ....\} = \{ا_ن\}$

وأيضاً:

$ا_ن = \frac{ن}{ن+١} \leq \frac{ن+١}{ن+١} = ١$ وبالتالي فإن $\{ا_ن\}$ محدودة من الأعلى بالعدد هـ = ١

ب- تعريف: نقول عن المتتالية أنها محدودة من الأدنى إذا وجد مثل ل بحيث:

E $ن_٠ : ن > ن_٠ \Longleftarrow ا_ن \leq ل$

مثال: بملاحظة $ب_ن = \frac{١}{ن}$ نلاحظ أن هذه المتتالية محدودة من الأدنى بالصفر لأن

$ب_ن = \frac{١}{ن} \leq ٠$



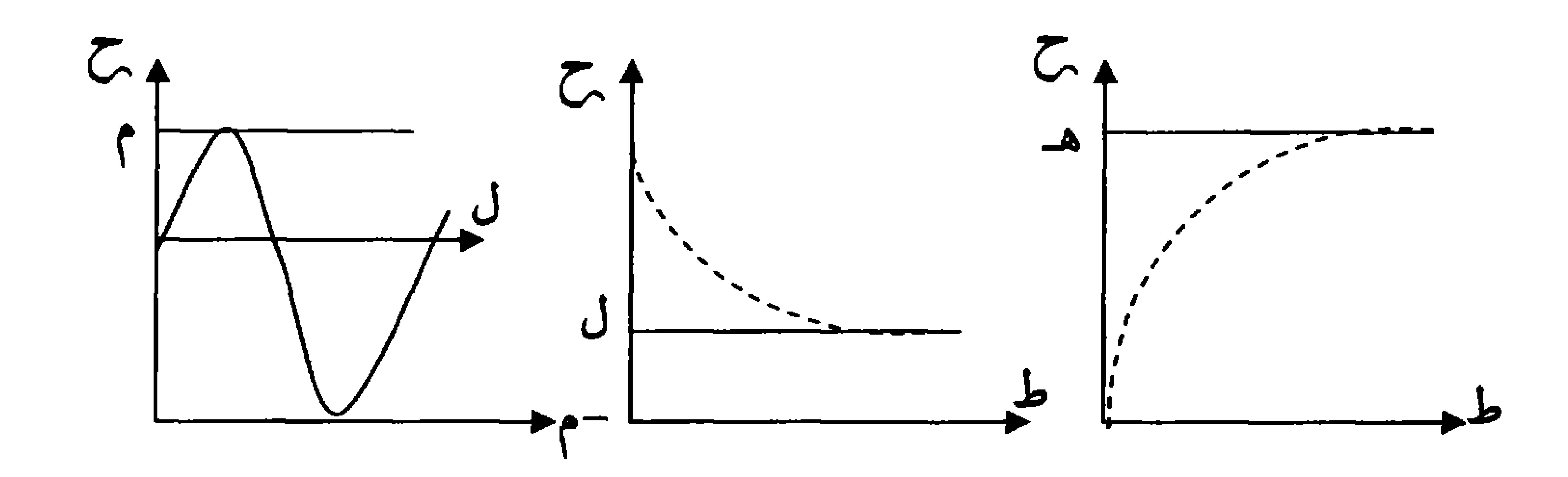
جـ- تعريف: نقول عن المتتالية {$أ_ن$} أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى ونقول أنها محدودة إذا وجد عدد مثل م بحيث

E $ن_0$: ن > $ن_0$ ⟸ |$أ_ن$| ≤ م وبالتالي يصبح لدينا - م ≤ $أ_ن$ ≤ م

مثال: المتتالية $أ_ن = \frac{(-1)^ن}{ن}$ محدودة من الأعلى والأدنى أي محدودة وذلك لأن

$$|أ_ن| = \left|\frac{(-1)^ن}{ن}\right| = \frac{1}{ن} < 1 \ ; \ -1 < أ_ن < 1$$

التمثيل الهندسي للمتتاليات المحدودة:

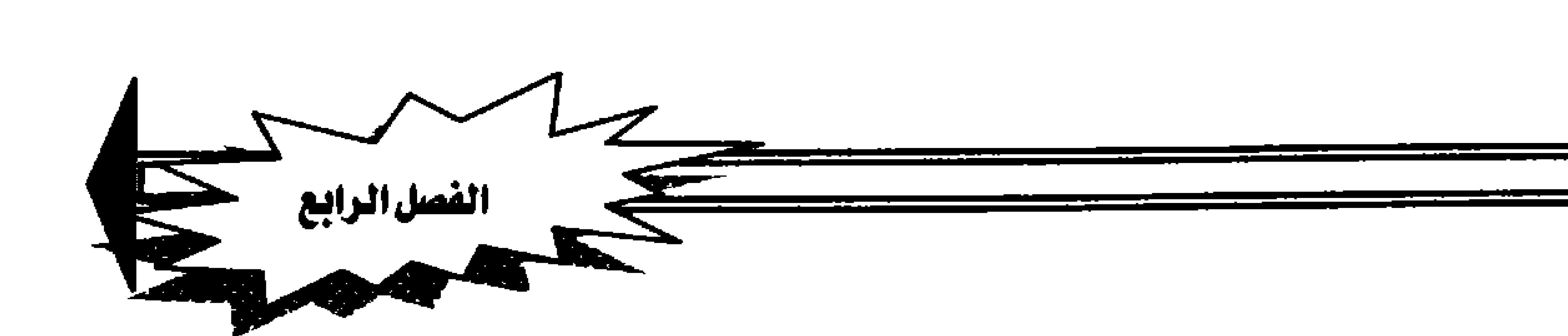


المتتاليات المطردة:

تنقسم المتتاليات المطردة إلى قسمين:

١. المتتاليات المتزايدة: نقول عن المتتالية {$أ_ن$} أنها متزايدة إذا كان

E $ن_0$: ن > $ن_0$ ⟸ $أ_{ن+1}$ ≤ $أ_ن$



ونقول أنها متزايدة تماماً إذا كان

E ن₀ : ن > ن₀ $\Longleftarrow$ $أ_{ن+١} > أ_ن$

مثال: بفرض لدينا المتتالية: $أ_ن = \frac{٢ ن}{ن + ١}$

نلاحظ أن $\{أ_ن\} = \{١، \frac{٤}{٣}، \frac{٦}{٤}،.........\}$ وأيضاً إذا نظرنا إلى المقدار

$$أ_{ن+١} - أ_ن = \frac{٢(ن+١)}{(ن+١)+١} - \frac{٢ ن}{(ن+١)} = \frac{٢ن^٢ + ٤ ن + ٢ - ٢ن^٢ - ٤ ن}{ن(ن+١)}$$

$= \frac{٢}{ن(ن+١)} > ٠ \Longleftarrow أ_{ن+١} - أ_ن > ٠ \Longleftarrow أ_{ن+١} > أ_ن$ والمتتالية متزايدة.

٢- المتتاليات المتناقصة: نقول أن المتتالية $\{أ_ن\}$ متتالية متناقصة إذا كان

E ن₀ : ن > ن₀ $\Longleftarrow$ $أ_{ن+١} \leq أ_ن$ ونقول أنها متناقصة تماماً إذا كان
$أ_ن > أ_{ن+١}$

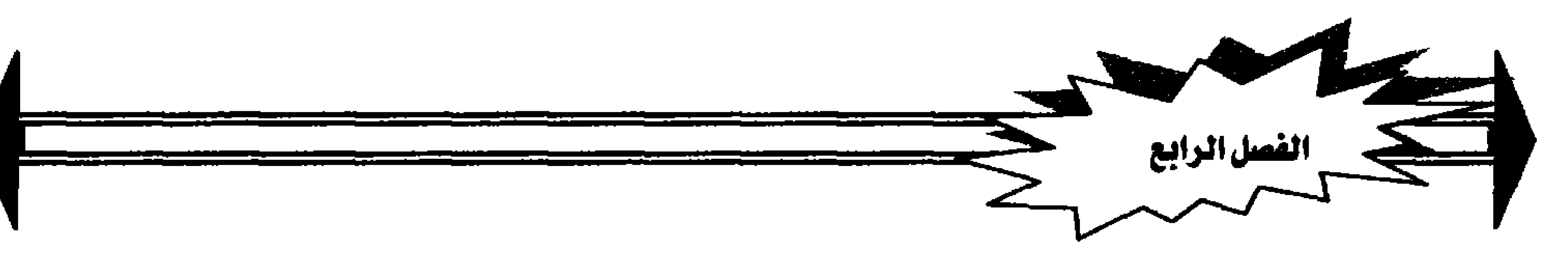
مثال: بفرض المتتالية $أ_ن = \frac{١}{ن}$ نلاحظ أن: $أ_{ن+١} - أ_ن = \frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن}$

$= \frac{ن-(ن+١)}{ن(ن+١)} = \frac{-١}{ن(ن+١)} < ٠ \Longleftarrow أ_{ن+١} < أ_ن$ والمتتالية متناقصة.

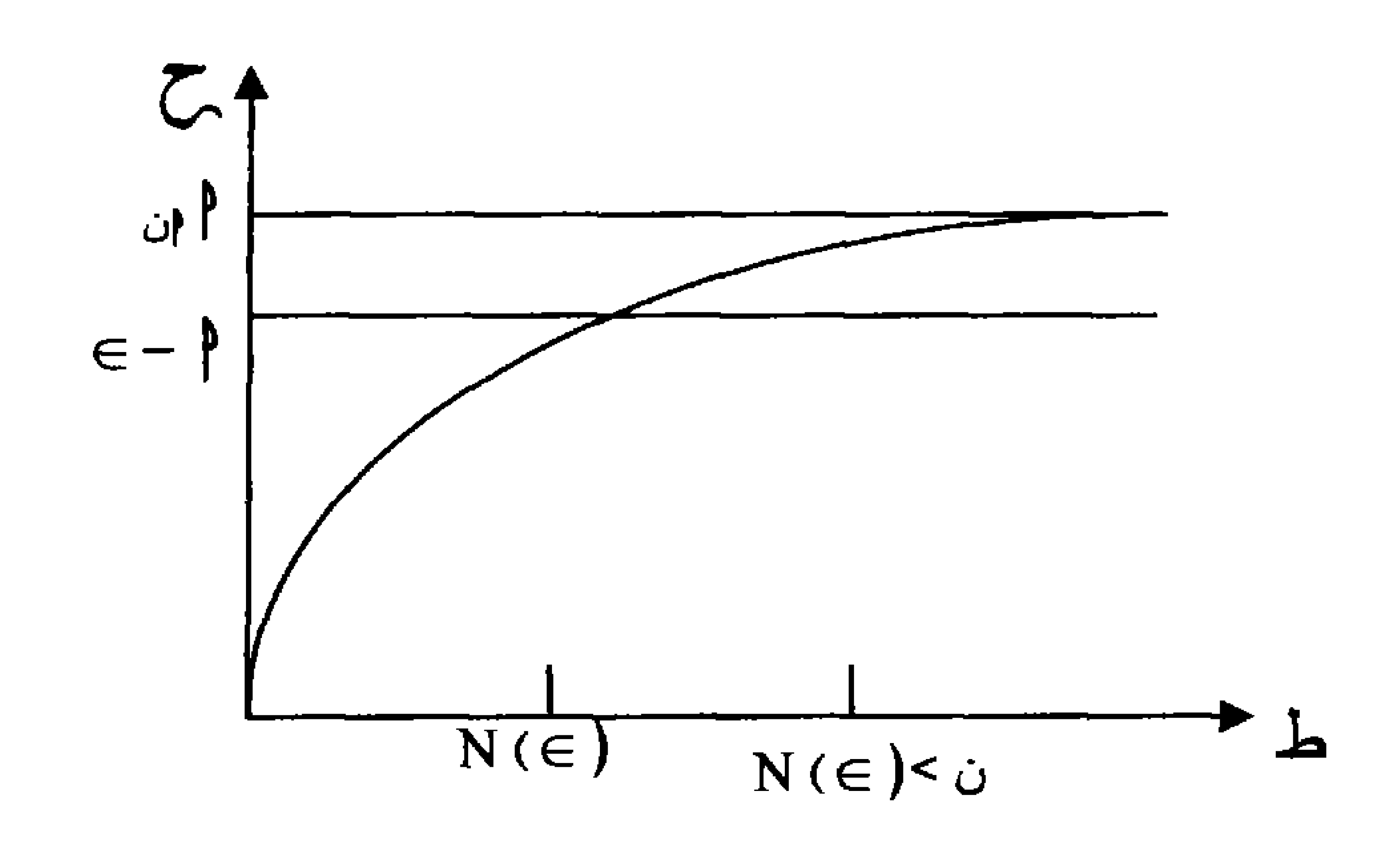
المتتاليات المتقاربة:

تعريف: نقول عن المتتالية $\{أ_ن\}$ أنها متقاربة إذا كان $\forall \in > ٠ : E N$
$(\in) : N < N (\in)$ حيث أن $N (\in)$ عبارة عن فترة نصف قطرها $= \in \Longleftarrow$
$| أ_ن - أ | < \in$ ونقول عن العدد $أ$ أنه نهاية هذه المتتالية ونكتب $\underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن = أ$





التفسير الهندسي لتعريف التقارب: إذا وجد لكل عدد حقيقي موجب نختاره نحن (بصورة كيفية) عدداً طبيعياً تابعاً له $N(\in)$ بحيث أنه من أجل ن أكبر من $N(\in)$ أي أن ن بعد $N(\in)$ فإن المقدار $أ_ن$ "حد المتتالية" قيمتها ستقترب قرباً كافياً من العدد أ وهذا ما عبرنا عنه $|أ_ن - أ| < \in$ وتمثيله الهندسي بالشكل:



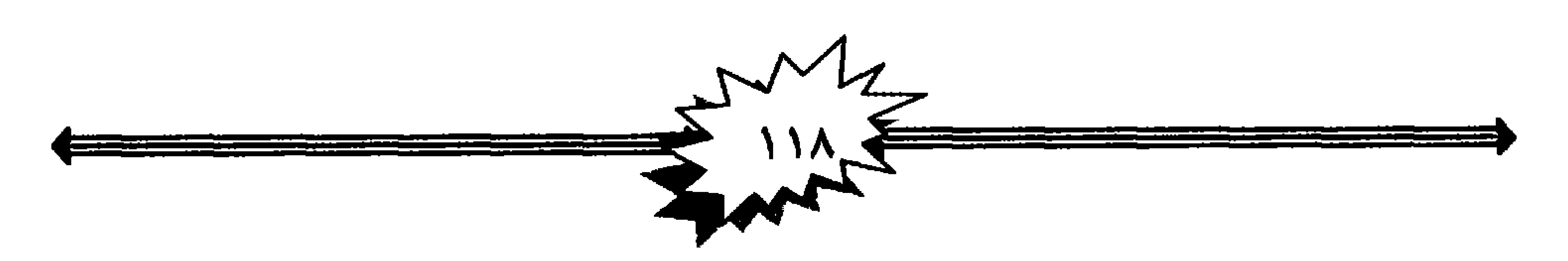
ولمناقشة الأخيرة من أجل أي عدد ∈ نختاره.

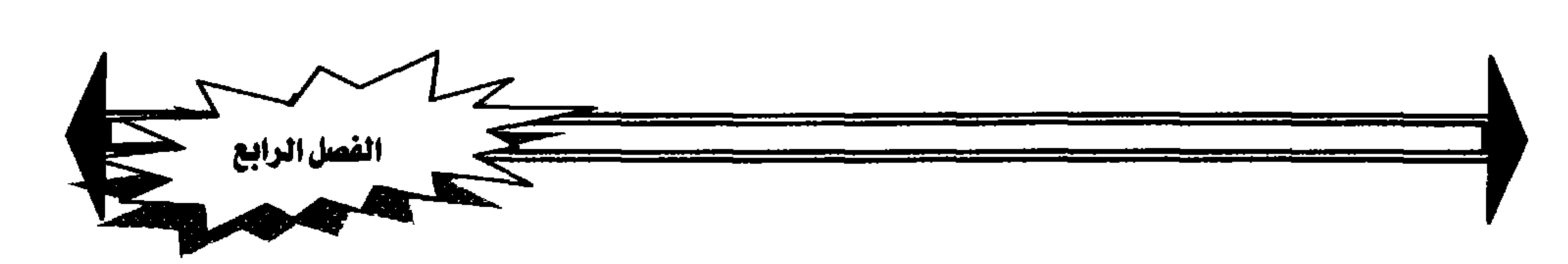
وبالتالي فعند مناقشة تقارب متتالية $\{أ_ن\}$ نحو عدد أ معلوم لدينا فإننا نركز على إيجاد العلاقة التي تربط بين ∈ و $N(\in)$ فإذا لم تكن هذه العلاقة موجودة فإن التعريف لن يكون محققاً ولن يكون هنالك تقارباً نحو العدد أ

مثال: برهن على أن $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن} = 0$

الآن لنكتب $\forall \in > 0 : E\, N(\in) : ن > N(\in) : |أ_ن - أ| < \in$

$$\left|\frac{1}{ن} - 0\right| < \in \Longleftarrow \frac{1}{ن} < \in \Longleftarrow ن > \frac{1}{\in}.$$





الآن باختيار $N(\epsilon) = [\frac{1}{\epsilon}]$ وبالتالي وصلنا إلى علاقة تربط بين ϵ و $N(\epsilon)$ عندئذ فإن التعريف محقق من أجل ن > $N(\epsilon)$ وعندئذ فإن

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{نها} \frac{1}{ن} = ٠$$

مثال: برهن أن $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها}$ ن = ∞، الآن لنفرض جدلاً أن $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها}$ ن = ∞ حيث ا < ∞ وإذا كتبنا الآن

$$\forall \epsilon > ٠ : E\, N(\epsilon) : ن\,(\epsilon) : |ا_ن - ا| < \epsilon$$

$$: |ن - ا| < \epsilon$$

$$\Longleftarrow ن - ا < \epsilon \Longleftarrow ن < \epsilon + ا$$

وطالما كان العدد ن أصغر من ا + ϵ كان التعريف محققاً أما إذا كان ن > ϵ + ا عندئذ فإن التعريف يصبح غير محققاً وبالتالي المتتالية $ا_ن$ = ن غير متقاربة نحو عدد ا كما فرضنا.

ملاحظات هامة للتعريف:

١. إن التعريف يعتبر شرطاً لازماً وكافياً للتقارب.

٢. نستخدم هذا التعريف عندما نريد إثبات أن عدداً ما ا يكون معلوماً أنه نهاية للمتتالية{ $ا_ن$}.

٣. نسمي المتتالية التي يكون فيها $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها}$ $ا_ن$ = $\pm\infty$ متتالية غير متقاربة أو متتالية متباعدة وعندما تكون $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها}$ $ا_ن$ غير موجودة فإن المتتالية أيضاً تكون متباعدة.



٤. إن حذف عدد منته من حدود المتتالية لا يؤثر في تقاربها ذلك لأننا في التعريف نختار الأعداد من بعد $\text{ن}(\in)$

أمثلة:

١- بفرض المتتالية $\text{أ}_{\text{ن}} = (-١)^{\text{ن}}$ ولندرس تقارب هذه المتتالية فنلاحظ أنه من أجل ن زوجي $\Leftarrow \text{أ}_{\text{ن}} = ١$ ن فردي $\Leftarrow \text{أ}_{\text{ن}} = -١$ وبالتالي فإن $(-١)^{\text{ن}} = \text{أ}_{\text{ن}}$ متباعدة.

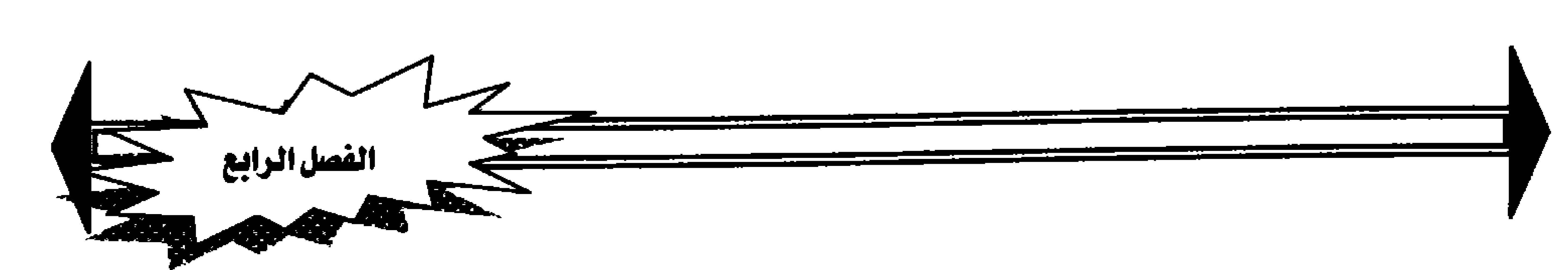
٢- المتتالية $\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{١}{(\text{ب})^{\text{ن}}}$ برهن أن هذه المتتالية متقاربة من الصفر عندما $\text{ب} > ١$

نلاحظ أن $\forall \in > ٠ : E\, N(\in) : \text{ن} > N(\in) : |\text{أ}_{\text{ن}} - \text{أ}| < \in$

الآن بملاحظة المقدار $|\text{أ}_{\text{ن}} - \text{أ}| = |\frac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}} - ٠| < \in$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}} < \in \Leftarrow \text{ب}^{٢} > \frac{١}{\in} \Leftarrow \text{ن} \,.\, \text{لو}_{\text{ن}}\, \text{ب} > \text{لو}_{\text{ن}}(\frac{١}{\in}) \Leftarrow \text{ق} > \frac{\text{لو}_{\text{ن}}(\frac{١}{\in})}{\text{لو}_{\text{ن}}(\text{ب})}$ وباختيار $N(\in) = \left[\frac{\text{ق}_{\text{ن}}(\frac{١}{\in})}{\text{ق}_{\text{ن}}(\text{ب})}\right]$ يكون التعريف محققاً.

أما من أجل الحالة ب = ١ نجد أن $\lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{١}{١^{\text{ن}}} = \lim_{\text{ن}\to\infty} ١ = ١$، أما من أجل الحالة $\text{ب} > ١$ عندئذ فإنه يوجد عدد مثل جـ بحيث ρ ن $\text{جـ} \doteq \frac{١}{\text{ب}}$ وتصبح $\lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \lim_{\text{ن}\to\infty} (\text{جـ})^{٢}$ حيث $\text{جـ} > ١$ وبفرض $\lim (\text{جـ})^{\text{ن}} = \text{أ} < \infty$



الآن لنطبق التعريف ونلاحظ المقدار $| أ_ن - أ | = | جـ^ن - أ | < \in$

$\Longleftarrow$ جـ^ن $-$ أ $< \in \Longleftarrow$ جـ^ن $< \in +$ أ $\Longleftarrow$ ن . ق$_ن$ (جـ) $<$ ق$_ن$ ($\in$ + أ)

$$\Longleftarrow ن < \frac{لو_ن (\in + ρ)}{لو_ن (جـ)}$$

وطالما كانت ن أصغر من المقدار $\frac{لو_ن (\in + ρ)}{لو_ن (جـ)}$ كان التعريف محققاً أما إذا كانت ن أكبر من المقدار المذكور فإن التعريف يكون غير محققاً و ب < ١

حيث $\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ب^ن} = \infty \Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} (جـ)^ن = \infty$

بتطبيق: $\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{(٢)^ن} = ٠ \quad \lim_{ن \to \infty} (٢)^ن = \infty$

مبرهنة: ١- إذا وجدت النهاية فإنها وحيدة.

البرهان: بفرض $\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ = أ و $\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ = أ$'$ حيث أ$'$ $\neq$ أ عندئذ وحسب التعريف

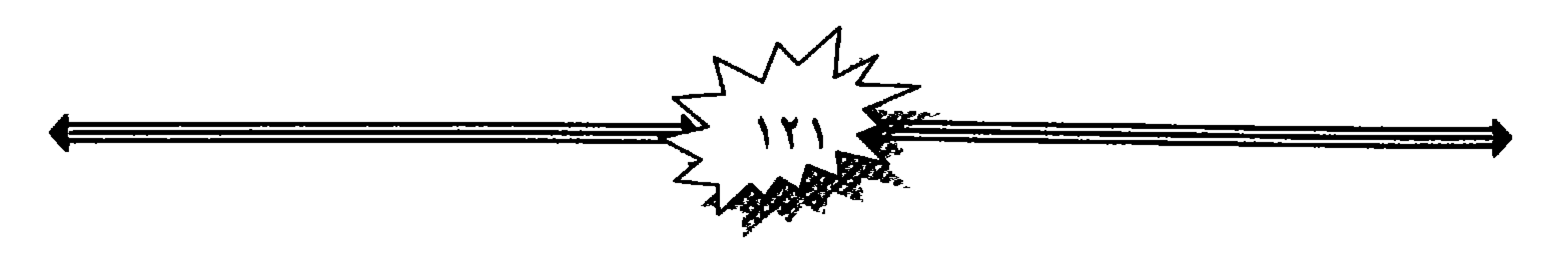
$$\forall \in_١ > ٠ : E\, N(\in_١) : ن > N(\in_١) \Longleftarrow | أ_ن - أ | < \in_١$$

$$\forall \in_٢ > ٠ : E\, N(\in_٢) : ن > N(\in_٢) \Longleftarrow | أ_ن - أ' | < \in_٢$$

الآن إذا اخترنا $\{N(\in_١) ، N(\in_٢)\}$ القيمة العظمى لهما وأسميناها N عندئذ فإن:

$$| أ_ن - أ | - | أ_ن - أ' | < | (أ_ن - أ) - (أ_ن - أ') | = | أ' - أ | <$$

$$\in_١ - \in_٢$$





وباختيار $\epsilon_2 = \epsilon_1 \Longleftarrow |أ' - أ| > 0 \Longleftarrow أ' = أ$ وهو المطلوب.

مبرهنة٢: إن كل متتالية متقاربة هي محدودة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

البرهان: بفرض {أن} متتالية متقاربة نحو العدد أ عندئذ فإنه وحسب التعريف:

$$\forall \epsilon_1 > \because : E\ (\epsilon) N : ن > (\epsilon) N \Longleftarrow | أ_ن - أ | > \epsilon$$

$$\Longleftarrow |أ_ن| - |أ| > |أ_ن - أ| > 1 \quad (\text{باختيار } \epsilon = 1)$$

$$\Longleftarrow |أ_ن| - |أ| > 1 \Longleftarrow |أ_ن| > 1 + |أ|$$

وبالتالي فإنه من أجل $|أ| + 1 = م \Longleftarrow م > |أ_ن| : (1) N > ن$.
وبالتالي {أن} محدودة تعريفاً.

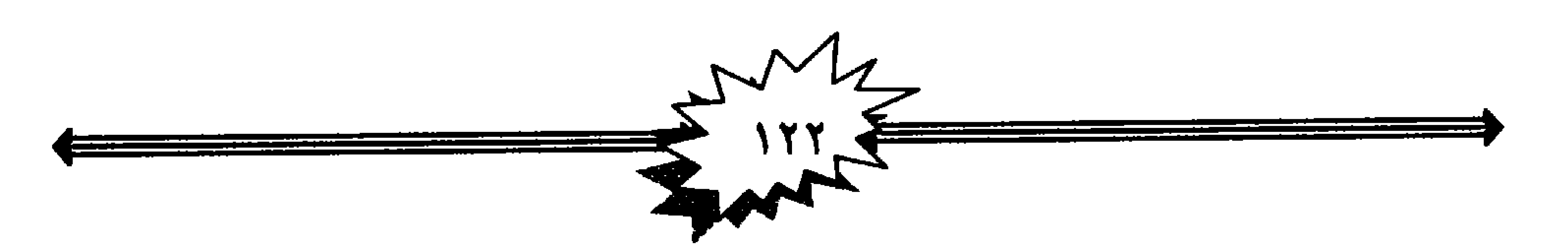
وبالنسبة للقسم الثاني من المبرهنة فإنه بالنظر إلى المتتالية $أ_ن = (-1)^ن$ نجد أنها محدودة من الأعلى بالعدد ١ ومن الأدنى بالعدد -١ ولكنها غير متقاربة.

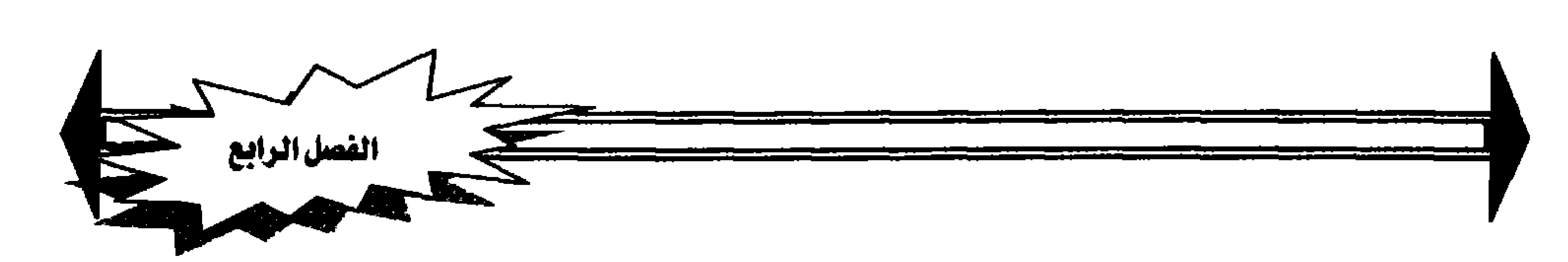
مبرهنة ٣:

إذا كانت {أن} متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو الحد الأعلى الأصغر ي $\{أ_ن\}\ \sup_{ن \ni ط}$

البرهان:

إذا كانت لدينا {أن} متزايدة عندئذ فإن $E\ ن_0 : ن > ن_0 : أ_{ن+1} > أ_ن$
وإذا كانت {أن} محدودة من الأعلى عندئذ فإن : $E\ ن_1 : ن > ن_1 : |أ_ن| > م$
حيث م هو الحد الأعلى الأصغري.





عندئذ وباختيار القيمة العظمى {ن. ، ن١ } = $N(\in)$ يصبح لدينا:

$\forall \in > \ni : \because : E\, N(\in) : ن > N(\in) \Longrightarrow م - \in \leq أ_ن \leq م \leq م +$ $\in$

الطرف الأيمن من المتراجحة يبرر على أساس أن { $أ_ن$ } محدودة، والطرف الأيسر منه يبرر لأن { $أ_ن$ } متزايدة.

الآن من تعريف الحد الأعلى الأصغري فإن م هو حد أعلى أصغري للمتتالية و | $أ_ن$ – م | $< \in \Longrightarrow$ $\underset{ن \to \infty}{نها}$ $أ_ن$ = م وهو المطلوب.

مبرهنة ٤:

إذا كانت لدينا المتتالية { $أ_ن$ } متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة نحو الحد الأدنى الأعظمي لها $\inf_{n\in N}\{a_n\}$; حيث $\{a_n\} = \{أ_ن\}$ $n \in N;$ ن $\in$ ط.

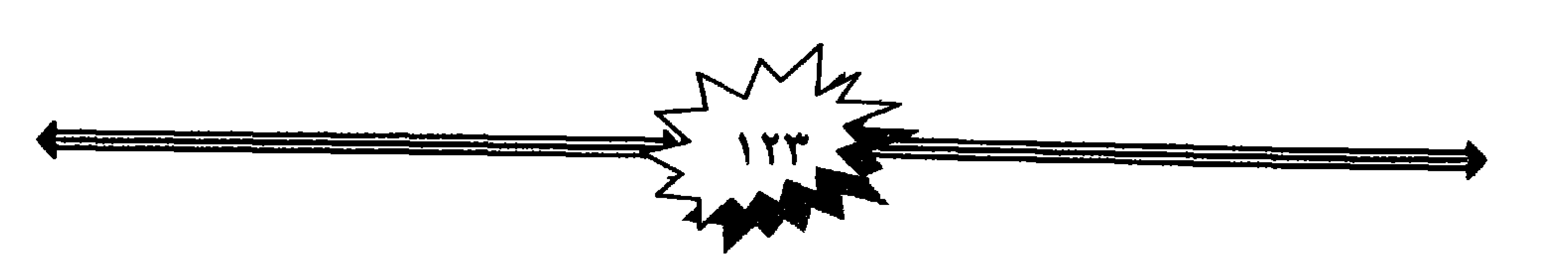
البرهان: تبرهن هذه المبرهنة بنفس طريقة البرهان السابق.

ملاحظات هامة على المبرهنة:

١- إذا كانت المتتالية { $أ_ن$ } متزايدة وغير محدودة من الأعلى فهي متباعدة حتماً.

٢- إذا كانت المتتالية { $أ_ن$ } متناقصة وغير محدودة من الأدنى فهي متباعدة حتماً.

٣- الشروط الواردة في المبرهنة -٣- و -٤- هي شروط كافية وغير لازمة للتقارب.





أمثلة. هامة:

١- أثبت أن المتتالية المعطاة بالقاعدة الضمنية $أ_ن = \sqrt{٢ + أ_{ن-١}}$ حيث $أ_١ = \sqrt{٢}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

الحل:

أولاً نلاحظ أن هذه المتتالية متتالية متزايدة وذلك لأن $أ_١ = \sqrt{٢} < أ_٢ = \sqrt{٢+\sqrt{٢}} < أ_٣ = \sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢}}} < أ_٤ < ....$ وأيضاً نلاحظ أن $\{أ_ن\}$ محدودة من الأعلى ذلك لأن $أ_١ = \sqrt{٢} < ٢$، $أ_٢ = \sqrt{٢+\sqrt{٢}} < \sqrt{٢ + ٢} = ٢$، .... $أ_ن = \sqrt{٢+١} < ٢$

وبالتالي $أ_ن < ٢$ ومتزايدة $٢ > \underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن$ وذلك حسب المبرهنة -٣- الآن من أجل حساب النهاية سنفرض أن $\underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن = \rho_{ن \to \infty}$ و $\underset{ن \to \infty}{نها} \rho_{ن+1} = أ$

حسب الملاحظة-٤-

$$\underset{ن \to \infty}{نها} أ_{ن+١} = \underset{ن \to \infty}{نها} \sqrt{٢ + أ_ن} = \underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن = أ \Leftarrow \sqrt{٢ + أ} = أ \Leftarrow أ^٢ = أ + ٢$$

$\Longleftarrow أ^٢ - أ - ٢ = ٠$ وبحل المعادلة الأخيرة نحصل على $أ = ٢$ أو $أ = -١$

والحل

$أ = -١$ مرفوض كون المتتالية ذات إشارة موجبة عندئذ فإن $\underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن = ٢$

٢- أثبت أن المتتالية $أ_ن = \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^ن$ متقاربة.



أولاً: المتتالية المعطاة متزايدة لأن

$$أ_ن = \left(١+\frac{١}{ن}\right)^ن = ١ + ١ + \frac{ن(ن-١)}{٢!}.\frac{١}{ن^٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!}.\frac{١}{ن^٣}+......$$

$$= ٢ + \left(١-\frac{١}{ن}\right) + \frac{١}{٣}\left(١-\frac{١}{ن}\right)\left(١-\frac{٢}{ن}\right) + ...$$

$$أ_{ن+١} = ٢ + ٢ + \frac{١}{٢!}\left(١-\frac{١}{ن+١}\right) + \frac{١}{٣!}\left(١-\frac{١}{ن+١}\right)\left(١-\frac{٢}{ن+١}\right)+.....$$

وبملاحظة أن $\left(١-\frac{١}{ن}\right) < \left(١-\frac{١}{ن+١}\right)$

نجد أن $أ_ن = أ_{ن+١} \Longleftarrow \{أ_ن\}$ متزايدة، الآن لنبرهن أن محدودة فنجد أن:

$$أ_ن = ٢ + ٢ + \frac{١}{٢!}\left(١-\frac{١}{ن+١}\right) + \frac{١}{٣!}\left(١-\frac{١}{ن+١}\right)\left(١-\frac{٢}{ن+١}\right) + ...$$

$$\le ٢ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + ...$$

وبملاحظة أن $ن! > (٢)^{ن-١} \Longleftarrow ن! > (٢)^{ن-١} \Longleftarrow \frac{١}{(٢)^{ن-١}} <$

$$\frac{١}{ن!} \Longleftarrow أ_ن < \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٤!} + ... <$$

الآن من أجل الطرف الأيمن للمتراجحة نجد أنه مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{١}{٤}$ وحدها الأول ٢

$$٢ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + ... \lim_{ن\to\infty} \frac{٢\left(١-\left(\frac{١}{٤}\right)^ن\right)}{\left(١-\frac{١}{٤}\right)} = \frac{٢}{١-\frac{١}{٤}} = \frac{٢}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٨}{٣}$$

$أ_ن < \frac{٨}{٣}$ ⟸ $\{أ_ن\}$ محدودة من الأعلى ومتزايدة ⟸ $\{أ_ن\}$ متقاربة حسب المبرهنة -٣- ونهايتها تسمى العدد النيبيري هـ حيث هـ = ٢,٧١

$$= \lim_{ن\to\infty} \left(١ - \frac{١}{ن}\right)^{ن}$$

مثال: بفرض لدينا المتتالية $أ_ن = \sqrt[ن]{أ}$ حيث $أ > ١$ برهن أنها متقاربة وأوجد نهايتها.

الحل:

نلاحظ أن:

$$أ = (١ + \sqrt[ن]{أ} - ١)^{ن} = ١ + ن(\sqrt[ن]{أ} - ١) + \frac{ن(ن-١)}{٢!}$$

$$\Leftarrow \sqrt[ن]{أ} - ١ < \frac{أ}{ن} \Leftarrow \lim_{ن\to\infty}(ن \sqrt{أ} - ١) = \lim_{ن\to\infty} \frac{أ}{ن} = ٠$$

$$\Leftarrow \lim_{ن\to\infty} \sqrt[ن]{أ} = ١$$

خواص نهاية المتتاليات:

مبرهنة ٥:

إذا كانت لدينا $\lim_{ن\to\infty} أ_ن = أ$ و $\lim_{ن\to\infty} ب_ن = ب$ عندئذ فإن

١- $\lim_{ن\to\infty}(أ_ن + ب_ن) = \lim_{ن\to\infty} أ_ن + \lim_{ن\to\infty} ب_ن$ ٣- $\lim_{ن\to\infty}(أ_ن . ب_ن) = \lim_{ن\to\infty} أ_ن . \lim_{ن\to\infty} ب_ن$

٢- $\lim_{ن\to\infty}$ (أن − بن) = $\lim_{ن\to\infty}$ أن − $\lim_{ن\to\infty}$ بن ٤- $\lim_{ن\to\infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = \frac{\lim_{ن\to\infty} أ_ن}{\lim_{ن\to\infty} ب_ن}$

البرهان: من الفرض لدينا:

$\forall \in_1 > 0 : E\, N(\in_1) : ن > N(\in_1) \Longrightarrow |أ_ن - أ| < \in_1$

$\forall \in_2 > 0 : E\, N(\in_2) : ن > N(\in_2) \Longrightarrow |أ_ن - أ| < \in_2$

الآن من أجل (١) نلاحظ أنه إذا اخترنا القيمة العظمى لـ:

ن = $\{N(\in_1) ، N(\in_2)\}$

ولاحظنا المقدار $|(أ_ن + ب_ن) - (أ + ب)| = |(أ_ن - أ) - (ب_ن - ب)|$
$\leq |أ_ن - أ| + |ب_ن - ب| < \in_1 + \in_2$

وباختيار $\in = \in_1 + \in_2$ **يتحقق التعريف** $\lim_{ن\to\infty}$ (أن + بن) = أ + ب

أما من أجل -٢- فإنه باختيار $\{N(\in_1) ، N(\in_2)\}$ **والقيمة العظمى لهما رمزنا لها بالرمز ن وبملاحظة المقدار نجد أن** $|(أ_ن - ب_ن) - (أ - ب)| =$
$|(أ_ن - أ) + (ب_ن - ب)| \leq |أ_ن - أ| + |ب_ن - ب| < \in_1 + \in_2$

الآن باختيار:

$\in = \in_1 + \in_2$ **نجد أن التعريف محقق و** $\lim_{ن\to\infty}$ (أن − بن) = أ − ب.

ومن أجل -٣- سنلاحظ المقدار:

$|أ_ن - ب_ن - أ . ب| = |أ_ن . ب_ن - أ . ب + أ_ن ب - أ_ن . ب|$

$= |ب(أ_ن - أ) + أ_ن (ب_ن - ب)| \leq |ب| . |(ب_ن - أ)| + |أ_ن| . |ب_ن - ب|$



وباعتبار أن $\lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = أ$

فهي متقاربة وبالتالي محدودة ولنفرض بالعدد م.

$\Leftarrow E_{ن}^{ن\to ق}$: ن > ن. : $|أ_ن| <$ م، الآن باختبار القيمة العظمى بـ$\{N(\in_1) ، N(\in_2)$، ن.$\}$ولنفرض أنها تساوي ن، نجد أن:

$$|أ_ن . ب_ن - أ . ب| < |ب| . \in_1 + م . \in_2$$

وباختيار:

$\in = |ب| . \in_1 +$ م . $\in_2$ يتحقق التعريف $\Leftarrow \lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن . ب_ن = أ . ب$

الآن من أجل -٤- نلاحظ المقدار $\left|\frac{أ_ن}{ب_ن} - \frac{أ}{ب}\right| = \left|\frac{أ_ن ب - أ ب_ن}{ب_ن ب}\right| =$

$$\left|\frac{أ_ن ب - أ ب_ن + أ_ن ب_ن - أ_ن ب_ن}{ب_ن ب}\right| = \left|\frac{ب_ن(أ_ن - أ) - أ_ن(ب_ن - ب)}{ب_ن ب}\right| \le \frac{1}{|ب|} .$$

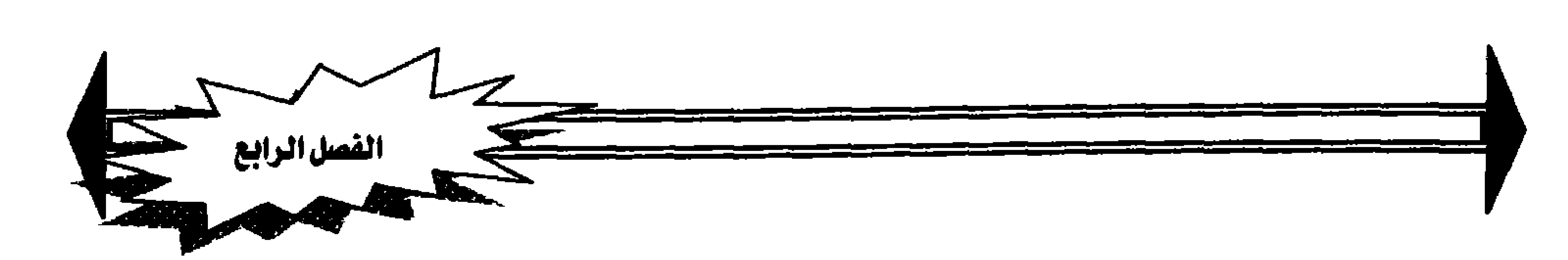
$|أ_ن - أ| + \left|\frac{أ_ن}{ب_ن ب}\right| . |ب_ن - ب|$ وبملاحظة أن $\{أ_ن\}$، $\{ب_ن\}$ متقاربتان $\Leftarrow$ هما محدودتين $\Leftarrow$ وباختيار القيمة العظمى لـ $\{N(\in_1) ، N(\in_2)$، ن.$\}$

ولنرمز لها بالرمز ن. وباختيار $\in = \frac{\in_1}{|ب|} +$ م. $\in_2$ يتحقق التعريف

$\Leftarrow \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = \frac{أ}{ب}$ حيث $ب \neq 0$

خواص المقارنة:

١- إذا كانت لدينا $\lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = أ$، و$\lim\limits_{ن \to \infty} ب_ن = ب$ وكان $أ_ن \ge ب_ن$ ولو بدءاً من حد معين عندئذ فإن $\lim\limits_{ن \to \infty} ب_ن = ب \le \lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = أ$.



٢- إذا كان لدينا ن $ب_ن \leq أ_ن \leq جـ_ن$ وكانت $\lim_{ن \to \infty} جـ_ن = أ = \lim_{ن \to \infty} ب_ن$ عندئذ فإن $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = أ$.

في الواقع $أ + \in \leq ب_ن \leq أ_ن \leq جـ_ن \leq أ - \in$ حسب تعريف تقارب $\{ب_ن\}$، $\{جـ_ن\} \Longleftarrow |أ_ن - أ| < \in \Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} أ_ن = أ$.

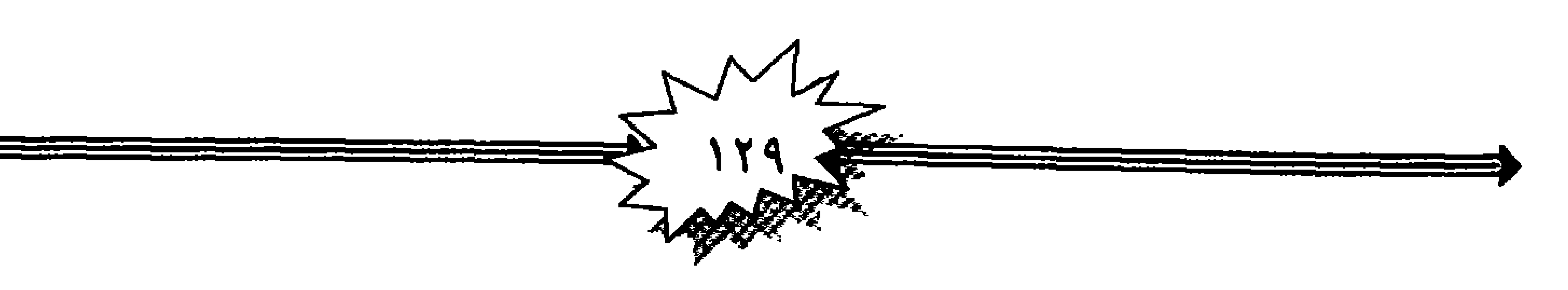
٣- إذا وجدت $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = أ$ فإن $\lim_{ن \to \infty} |أ_ن| = |أ|$ موجودة والعكس غير صحيح بالضرورة.

تنتج هذه الخاصية من ملاحظة أن $|أ_ن| - |أ| \leq |أ_ن - أ| < \in$ أما العكس فبملاحظة أن المتتالية $أ_ن = (-1)^ن$ ليس لها نهاية بينما $|أ_ن| = 1$ متقاربة لأنها ثابتة أي أن $\lim_{ن \to \infty} |أ_ن| = 1$

ملاحظات هامة:

١- إن الشروط الواردة في فقرة (خواص نهاية المتتاليات) شروط كافية وليست لازمة أي أنه إذا وجدت $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = أ$ و $\lim_{ن \to \infty} ب_ن = ب$ فإن $\lim_{ن \to \infty} أ_ن + ب_ن = أ + ب$ موجودة بينما إذا كانت $\lim_{ن \to \infty} أ_ن + ب_ن$ موجودة فقط تكون $\lim_{ن \to \infty} أ_ن$ أو $\lim_{ن \to \infty} ب_ن$ غير موجودتين وكذلك الأمر بالنسبة لـ $\lim_{ن \to \infty} أ_ن - ب_ن$ أو $\lim_{ن \to \infty} أ_ن . ب_ن$ أو $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن}$

مثال: بفرض $\lim_{ن \to \infty} ن = \infty$ غير موجودة و $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن^2} =$ صفر نلاحظ أن $\lim_{ن \to \infty} ن \times \frac{1}{ن^2} = \lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن} = 0$ بفرض أيضاً





$\lim_{ن \to \infty} (-1)^{ن}$ غير موجودة و $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن} = 0$ عندئذ فإن $\lim_{ن \to \infty} \frac{(-1)^{ن}}{ن} = 0$

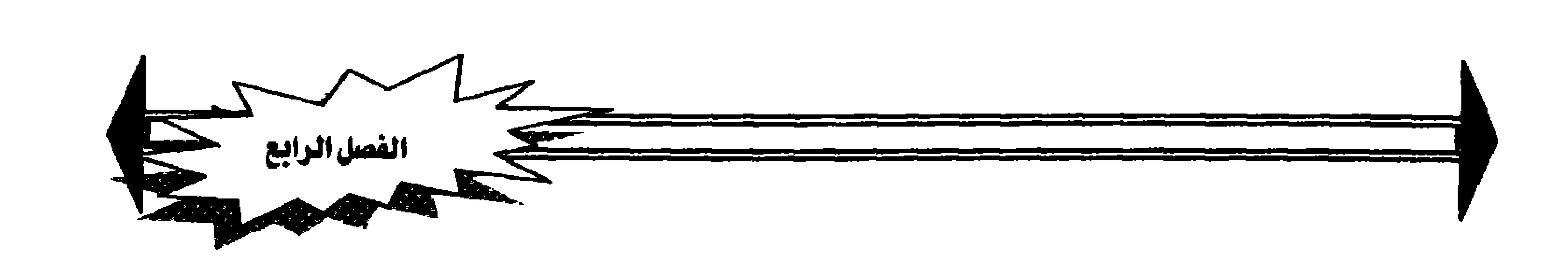
حالات عدم التعيين:

إذا كنا أمام حساب نهاية متتالية عددية حقيقية ووجدنا إحدى الحالات

التالية: $\lim_{ن \to \infty} أ_{ن} = \begin{cases} \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \text{ ضرب } \infty \\ 1^{\infty}, (\infty)^{0}, (0)^{0} \\ \infty - \infty \end{cases}$

فإذا حصلنا على إحدى الحالات السابقة وجب علينا إزالتها مع ملاحظة أن إزالتها تعطي إما صفراً أو لا نهاية أو عدداً محدوداً.





أمثلة عامة:

١- احسب $\lim_{ن\to\infty} \frac{ن^{٢}+١}{ن^{٣}+ن}$

بملاحظة أن $\lim_{ن\to\infty} \frac{ن^{٢}+١}{ن^{٣}+ن} = \frac{\infty}{\infty}$ لذلك يجب إزالة حالة عدم التعيين هذه

$$\lim_{ن\to\infty} \frac{ن^{٢}\left(١+\frac{١}{ن^{٢}}\right)}{ن^{٣}\left(١+\frac{١}{ن^{٢}}\right)} = \lim_{ن\to\infty} \frac{١}{ن} = ٠$$

٢- احسب النهاية $\lim_{ن\to\infty} \frac{٢ن+١}{٣ن+٥}$ بملاحظة أن $\lim_{ن\to\infty} \frac{٢ن+١}{٣ن+٥} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{ن\to\infty} \frac{٢ن+١}{٣ن+٥} = \lim_{ن\to\infty} \frac{ن\left(٢+\frac{١}{ن}\right)}{ن\left(٣+\frac{١}{ن}\right)} = \lim_{ن\to\infty} \frac{٢+\frac{١}{ن}}{٣+\frac{١}{ن}} = \frac{٢}{٣}$$

٣- احسب النهاية $\lim_{ن\to\infty} \frac{ن^{٢}+١}{ن}$ بملاحظة أن $\lim_{ن\to\infty} \frac{١}{ن}(ن^{٢}+١) = ٠$ ضرب ∞ وهي حالة عدم تعيين.

$\lim_{ن\to\infty} \frac{ن^{٢}+١}{ن} = \lim_{ن\to\infty} ن + \frac{١}{ن} = \infty$ وبشكل عام يمكن إيراد الخاصية التالية:

إذا كنا أمام النهاية $\lim_{ن\to\infty} \frac{أ_{١} ن^{ل} + أ_{٢} ن^{ل-١} + \dots\dots + أ_{ن}}{ب_{١} ن^{م} + ب_{٢} ن^{م-١} + \dots\dots + ب_{س}}$ عندئذ فإنه

لدينا ٣ حالات:





١- $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_1 ن^{ل} + \dots\dots}{ب_1 ن^{م} + \dots\dots} = \infty$ حيث $م < ل$

٢- $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_1 ن^{ل} + \dots\dots}{ب_1 ن^{م} + \dots\dots} = \frac{أ_1}{ب_1}$ حيث $ل = م$

٣- $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_1 ن^{ل} + \dots\dots}{ب_1 ن^{م} + \dots\dots} = 0$ حيث $م > ل$

مبرهنة ستولتز:

إذا كانت لدينا متتالية متزايدة $\{ب_ن\}$ وغير محدودة ومتتالية أخرى $\{أ_ن\}$ بحيث أن $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \infty$ عندئذ فإن: $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{أ_{ن+1} - أ_ن}{ب_{ن+1} - ب_ن}$

البرهان:

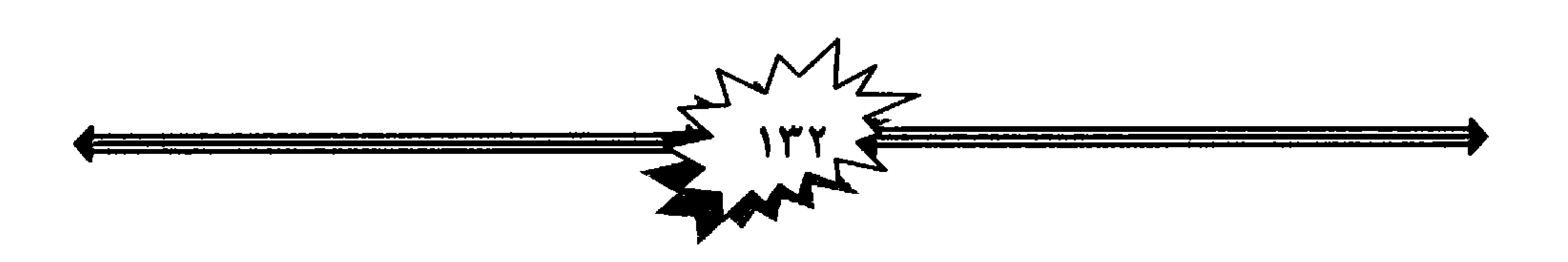
بفرض النهاية $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_{ن+1} - أ_ن}{ب_{ن+1} - ب_ن}$ **حيث أ عدداً محدوداً عندئذ فإن:**

$أ - \epsilon < \frac{أ_{ن+1} - أ_ن}{ب_{ن+1} - ب_ن} < أ + \epsilon$ **بدءاً من حد معين N.**

عندئذ يمكن كتابة $أ - \epsilon < \frac{أ_{N+1} - أ_N}{ب_{ن+1} - ب_N} < أ + \epsilon$

$أ - \epsilon < \frac{أ_{ن+1} - أ_ن}{ب_{ن+1} - ب_ن} < أ + \epsilon$

الآن وحسب خواص النسبة $أ - \epsilon < \frac{أ_ن - أ_ن}{ب_ن - ب_ن} < أ + \epsilon$



الآن بكتابة المقدار $\left| \left(\text{م} - \frac{\text{م}_{ن} - \text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن} - \text{ب}_{ن}}\right)\left(\frac{\text{ب}_{N}}{\text{م}_{N}} - ١\right) + \frac{\text{ب}_{N} - \text{م}_{N}}{\text{ب}_{N}} \right| =$

$$\left|\frac{\text{م}_{ن}}{\text{م}_{ن}} - \text{م}\right| \le \left|\frac{\text{م}_{ن} - \text{م}.\text{ب}_{ن}}{\text{ب}_{ن}}\right| + \left|\left(\frac{\text{م}_{ن} - \text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن} - \text{ب}_{ن}} - \text{م}\right)\right|$$

وبملاحظة أن:

$$\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{\text{م}_{ن} - \text{م}\ \text{ب}_{ن}}{\text{ب}_{ن}}\right|$$

وبملاحظة أن $\{\text{ب}_{ن}\}$ متزايدة وغير محدودة عندئذ فإن:

$$\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{\text{م}_{N} - \text{م}\ \text{ب}_{N}}{\text{ب}_{N}}\right| \Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} \left|\left(\frac{\text{م}_{ن} - \text{م}_{N}}{\text{ب}_{ن} - \text{ب}_{N}} - \text{م}\right)\right| = ٠$$

$$\Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} \left|\frac{\text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن}} - \text{م}\right| = \text{صفر} \Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} \frac{\text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن}} = \text{م} \Longleftarrow \lim_{ن \to \infty} \frac{\text{م}_{ن+١} - \text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن+١} - \text{ب}_{ن}}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{\text{م}_{ن}}{\text{ب}_{ن}}$$

ملاحظة: نستخدم مبرهنة ستولتز في الغالب لإزالة حالات عدم التعيين.

مثال: من أجل النهاية $\lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{٢ن + ٥}$: $\lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{٢ن + ٥} = \frac{\infty}{\infty}$

وهي حالة عدم تعيين يجب إزالتها:

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{٢ن + ٥} = \lim_{ن \to \infty} \frac{(ن+٢) - (ن+١)}{(٢(ن+١)+٥) - (٢ن+٥)} = \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}.$$



❖ اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر:

تعريف:

نقول عن المتتالية $\{أ_ن\}$ أنها لا متناهية في الصغر إذا كانت $\underset{ن\to\infty}{نها}\ أ_ن = 0$

ونقول عن المتتالية $\{ب_ن\}$ أنها لا متناهية في الكبر إذا كانت $\underset{ن\to\infty}{نها}\ ب_ن = \infty$

خواص اللامتناهيات في الكبر واللامتناهيات في الصغر:

١- إن المجموع الجبري لعدد منته من اللامتناهيات في الصغر هو لا متناه في الصغر.

٢- جداء متغير محدود في لا متناه في الصغر هو لا متناه في الصغر.

٣- إذا كانت $\{أ_ن\}$ محدودة و $ب_ن$ لا متناه في الكبر عندئذ فإن $\underset{ن\to\infty}{نها}\ \frac{أ_ن}{ب_ن} = 0$

المتتاليات الجزئية:

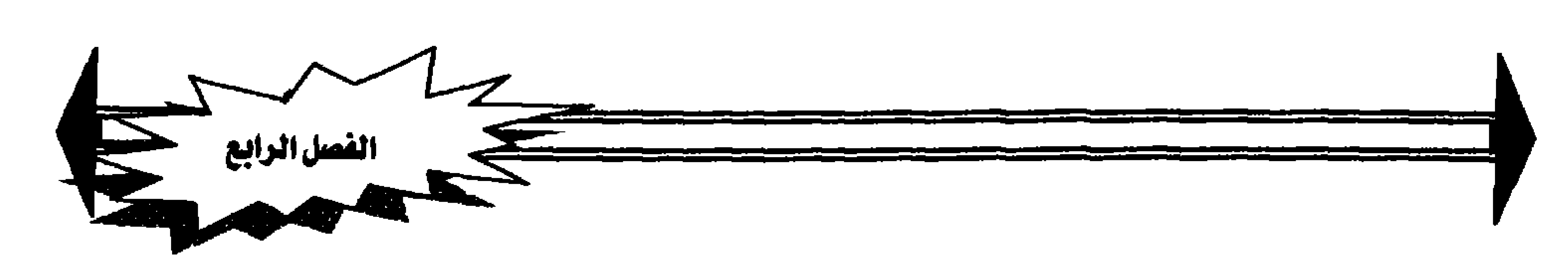
١- تعريف: إذا كانت لدينا متتالية $\{أ_ن\}$ حيث $أ_ن: ط \longrightarrow ح$ وكان لدينا التطبيق

$ن_ك : ط \longrightarrow و$ حيث و مجموعة جزئية من ط عندئذ فإن:

$أ_{ن_ك} : و \longrightarrow ح$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\{أ_ن\}$

مثال: بفرض لدينا $أ_ن = ن^2$ وكان التطبيق $ن_ك : و \longrightarrow ط$ معرّفاً بالشكل $ن_ك = 2ك + 1$ عندئذ فإن $أ_{ن_ك} = (2ك + 1)^2$ وهي متتالية جزئية من المتتالية $\{أ_ن\}$.

مثال: $أ_ن = (-1)^ن$ الآن بملاحظة $ن_ك: ط \longrightarrow و$ حيث $ن_ك: 2ك$ عندئذ



فإن $أ_{ن_ك} = (-1)^{2ك} = 1$ وهي متتالية جزئية من $أ_ن = (-1)^ن$.

ملاحظة هامة: إن مجموعة قيم المتتالية الجزئية هي مجموعة جزئية من المتتالية الأصلية أي أن $\{أ_{ن_ك}\} \subseteq \{أ_ن\}$.

مبرهنة ٧: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية هو أن تتقارب كل متتالية جزئية منها نحو نفس العدد.

البرهان: اللزوم:

إذا كانت أي متتالية جزئية من المتتالية الأصلية متقاربة عندئذ فإن المتتالية $\{أ_ن\}$ متقاربة لأن أي متتالية جزئية من نفسها.

الكفاية: بفرض $\underset{ن\to\infty}{نها} أ_ن = أ$ عندئذ وباعتبار $\{أ_{ن_ك}\}$ حدود مختارة من المتتالية الأصلية $\{أ_ن\}$ فإن: $|أ_{ن_ك} - أ| \underset{ن\to\infty}{<} \epsilon \Longrightarrow \underset{ن\to\infty}{نها} أ_{ن_ك} = أ$.

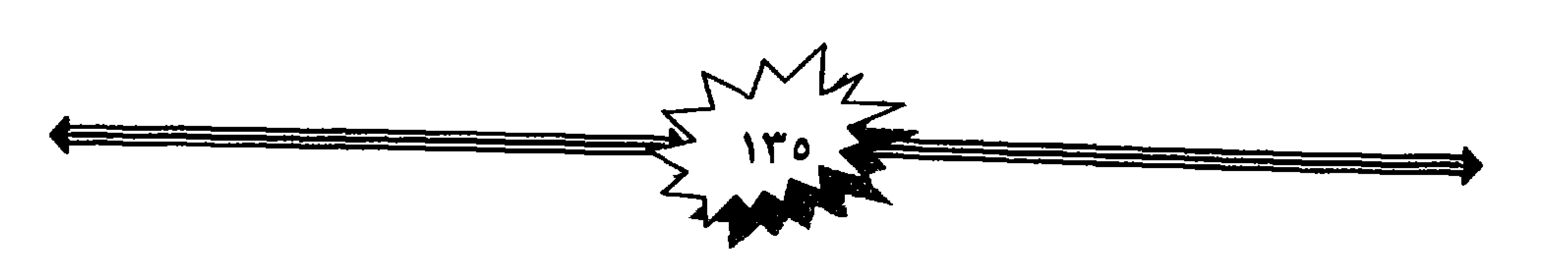
النهاية العليا والنهاية الدنيا: تعريف النهاية العليا:

بفرض $\{أ_ن\}$ هي متتالية جزئية من $\{أ_ن\}$ حيث $\{أ_{ن_م}\}$ هي أكبر المتتاليات الجزئية من $\{أ_ن\}$ عندئذ فإننا نقول أن:

$\underset{ن_ك\to\infty}{نها} أ_{ن_ك} = \underset{ن\to\infty}{\overline{نها}} أ_ن$ هي النهاية العليا للمتتالية $\{أ_ن\}$.

وتعرّف النهاية الدنيا للمتتالية $\{أ_{ن_ك}\}$ بأنها نهاية أصغر متتالية جزئية ويرمز لها $\underset{ن\to\infty}{نها} أ_{ن_ك} = \underset{ن\to\infty}{\underline{نها}} أ$

مثال: بفرض لدينا المتتالية $أ_ن = جا\frac{ن\pi}{2}$ الآن بملاحظة أن: $أ_{4ن+1} =$





$$جا(٤ن+١)\frac{\pi}{٢} = جا(٢\pi + \frac{\pi}{٢}) = جا\frac{\pi}{٢} = ١$$

وبالتالي $\lim_{ن\to\infty} جا\frac{ن\pi}{٢} = ١$، بينما نلاحظ أن $\lim_{ن\to\infty} جا\left[(٤ن+٣)\frac{\pi}{٢}\right] =$

$$\lim_{ن\to\infty} جا\frac{ن\pi}{٢} = \lim_{ن\to\infty} -١ = -١$$

مبرهنة ٨:

إن الشرط اللازم والكافي لوجود $\lim_{ن\to\infty} ا_ن = ا$ هو أن يكون:

$$\overline{\lim_{ن\to\infty}} ا_ن = \underline{\lim_{ن\to\infty}} ا_ن = ا$$

البرهان: اللزوم:

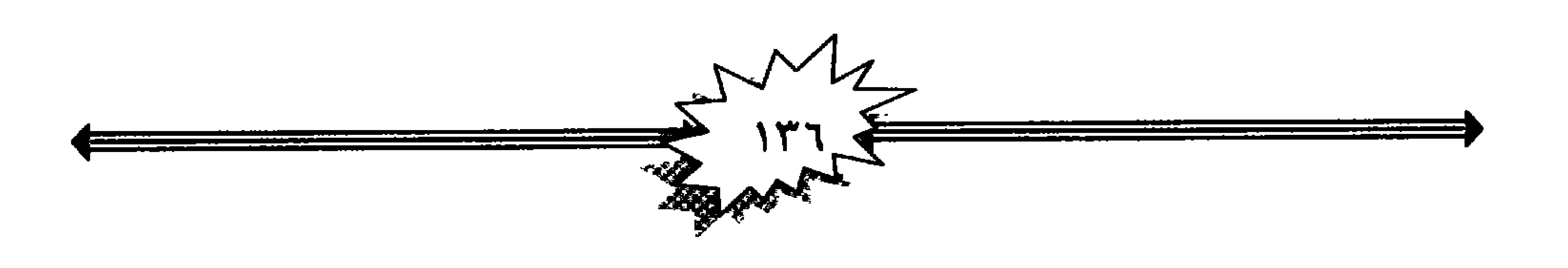
إذا كانت $\lim_{ن\to\infty} ا_ن = ا$ موجودة عندئذ فإن أي متتالية جزئية من $\{ا_ن\}$ متقاربة نحو نفس العدد وفقاً للمبرهنة -٧- وبالتالي:

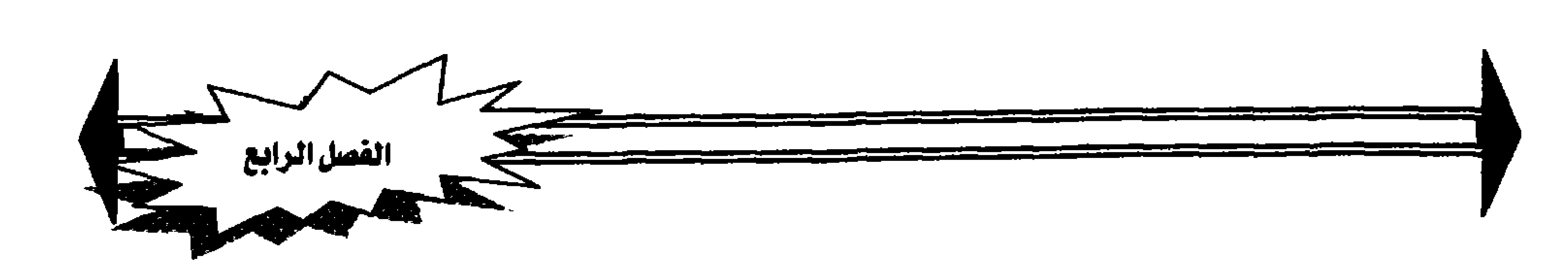
$$\lim ا_{ن_ك} = \lim ا_{ن_ك} = ا \;;\; \lim ا'_{ن_ك} = \lim ا_ن = ا \Longrightarrow \overline{\lim} ا_ن = \underline{\lim} ا_ن$$

الكفايـة: بملاحظـة أن $ا'_{ن_ك} \geq ا_ن \geq ا_{ن_ك}$ وبملاحظـة مـن الفـرض أن $\lim ا'_{ن_ك} = ا$ وبالتـالي حسـب الخاصـية رقـم -٢- مـن خـواص المقارنـة نجـد أن $\lim_{ن\to\infty} ا_ن = ا$ النهاية متقاربة نحو العدد $ا$

مبرهنة -٩- إذا كانت $\{ا_ن\}$ متتالية متزايـدة عندئـذ فـإن الـشرط الـلازم والكافي لتقارب $\{ا_ن\}$ هو تقارب أي متتالية جزئية فيها، أي أن تتقـارب متتاليـة جزئية منها واحدة على الأقل.

البرهان: إذا كانت $\{ا_ن\}$ متتالية متزايدة وكانت $\{ا_{ن_ك}\}$ متتالية جزئية منها متقاربة عندئذ فإن $\{ا_{ن_ك}\}$ محدودة $\Longleftarrow$ $\{ا_ن\}$ متقاربة.





المتتاليات الجزئية النظامية:

تعريف: نقول عن مجموعة المتتاليات من أجل العدد (ف) بالشكل:

$أ_ن (1) = أ_ف$

$أ_ن (2) = أ_{ف+1}$ بأنها متتاليات جزئية نظامية معرفة على المتتالية $\{أ_ن\}$ من أجل العدد الطبيعي ف: ف $\in$ ط.

ملاحظة: إن المتتاليات الجزئية النظامية المعرّفة من أجل العدد ف للمتتالية $\{أ_ن\}$ يمثل تجزئة لمجموعة قيم المتتالية $\{أ_ن\}$.

أمثلة: ١- من أجل المتتالية $أ_ن = (-1)^ن$ لدينا المتتاليات الجزئية النظامية من أجل ف = ٢ بالشكل

$$أ_ن (1) = أ_{2ن} = (-1)^{2ن} = 1$$

$$أ_ن (2) = أ_{2ن+1} = (-1)^{2ن+1} = -1$$

٢- من أجل المتتالية $أ_ن = جا\frac{ن\pi}{2}$ لدينا المتتاليات الجزئية النظامية من أجل ف = ٤ بالشكل

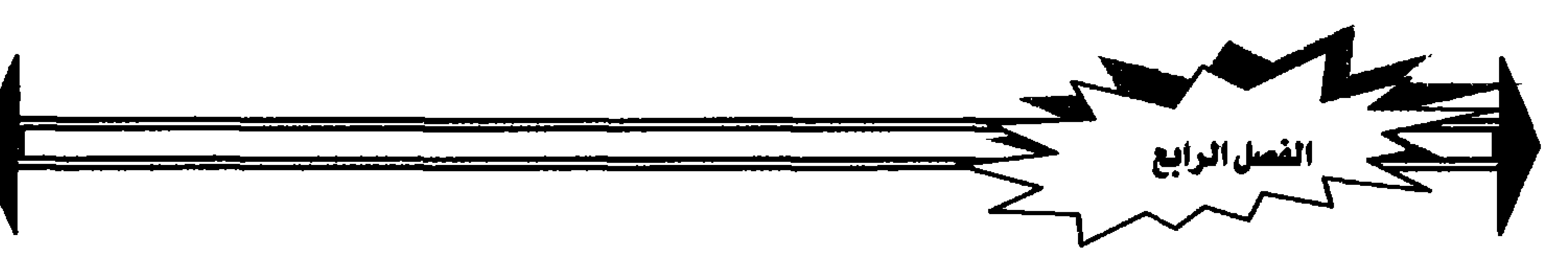
$$أ_ن (1) = أ_{4ن} = جا\frac{4ن.\pi}{2} \quad أ_ن (2) = أ_{4ن+1} = جا\left((4ن+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$أ_ن (3) = أ_{4ن+2} = جا\left((4ن+2)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad أ_ن (4) = أ_{4ن+3} =$$

$$جا\left((4ن+3)\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

مبرهنة -١٠-: إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\{أ_ن\}$ متقاربة هو أن تكون المتتاليات الجزئية النظامية المعرّفة من أجل أي عدد ف للمتتالية $\{أ_ن\}$ متقاربة نحو عدد معين أ.





المتتاليات الأساسية "متتاليات كوشي":

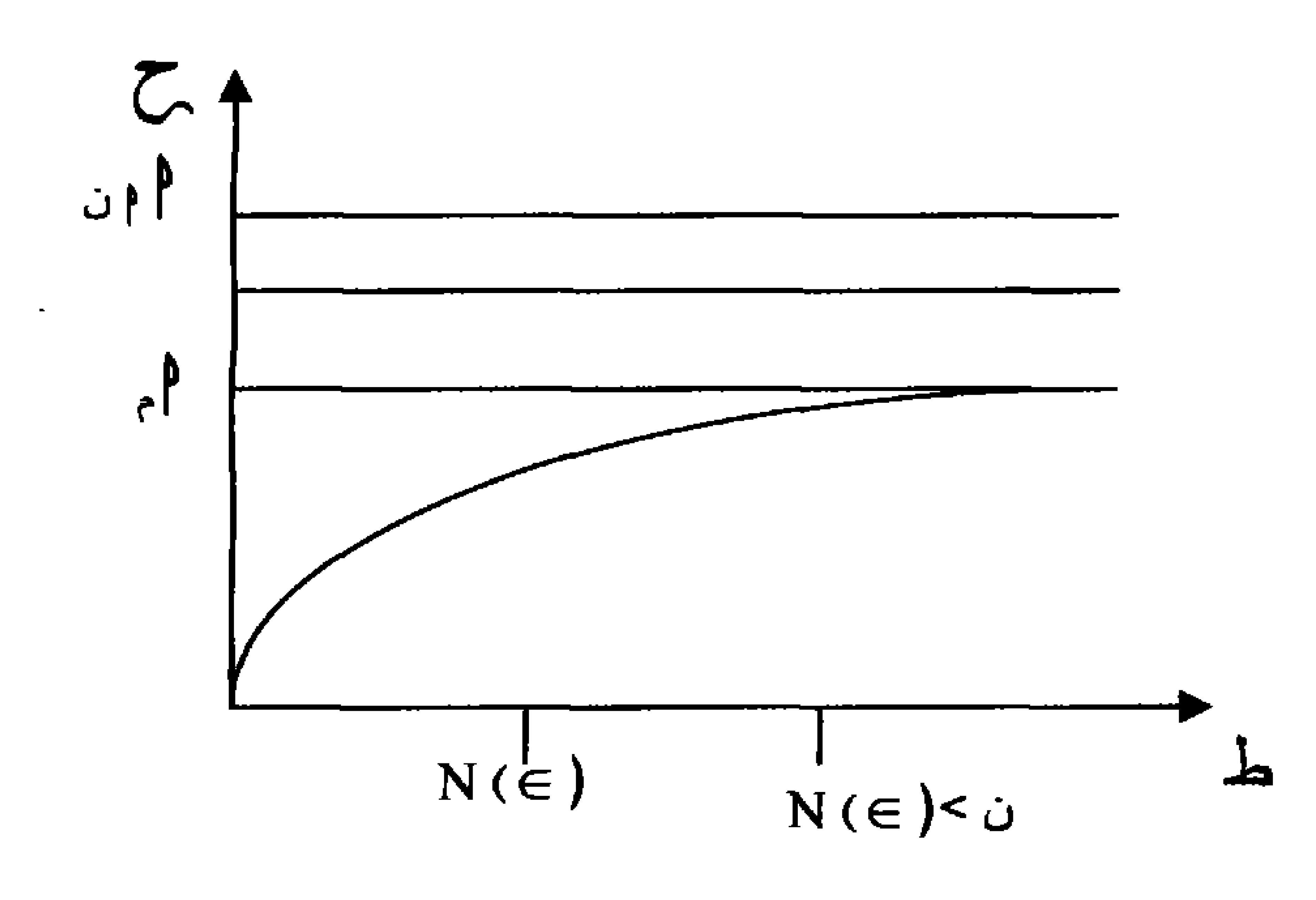
تعريف: نقول أن $\{أ_{ن}\}$ هي متتالية كوشية إذا كانت:

$$\forall \in > 0 : \exists N(\in) : ن ، م > N(\in) \Longrightarrow |أ_{ن} - أ_{م}| < \in$$

مفهوم تعريف كوشي: معنى أن تكون $\{أ_{ن}\}$ كوشية هو أن يكون الفرق بين حدودها بدءاً من حد معين $N(\in)$ هو مقدار صغير جداً وأصغر من $(\in)$.

يمكن صياغة شرط كوشي على الشكل:

$$\forall \in > 0 : \exists N(\in) : ن > N(\in) \Longrightarrow |أ_{ن+ف} - أ_{ن}| < \in$$ **وذلك مهما يكن العدد ف الطبيعي.**

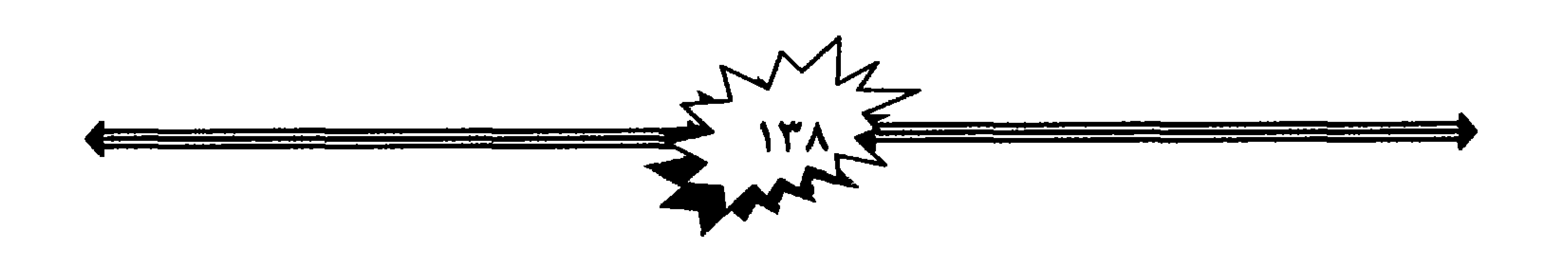


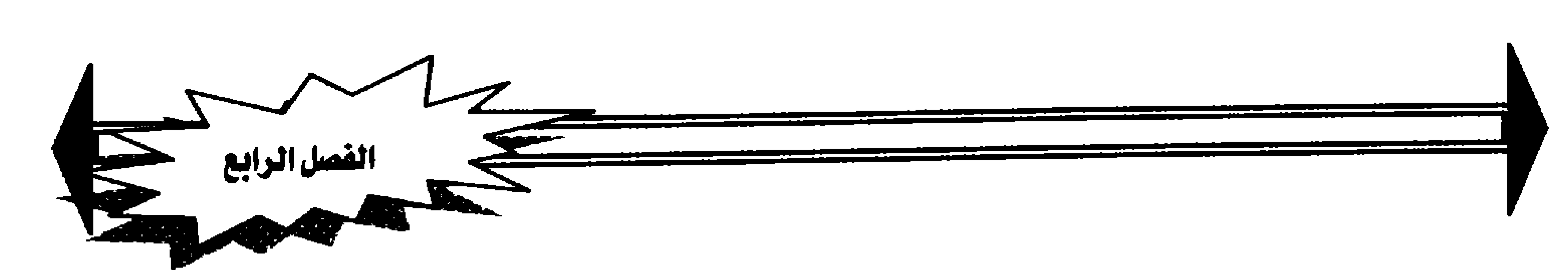
مبرهنة هامة -١١- إن كل متتالية كوشية متقاربة وكل متتالية متقاربة كوشية.

البرهان: إذا كانت $\{أ_{ن}\}$ كوشية فإن وحسب التعريف:

$$\forall \in > 0 : \exists N(\in) : ن ، م > N(\in) \Longrightarrow |أ_{ن} - أ_{م}| < \in$$

$$\Longrightarrow |أ_{ن} - أ_{م}| = |أ_{ن} - أ - أ_{م} + أ| = |(أ_{ن} - أ) - (أ_{م} - أ)| \geq |أ_{ن} -$$





$$|أ_ن - أ| < \in \Longleftarrow |أ_م - أ| + |أ| < \in$$

المتتالية {أن} متقاربة تعريفاً

أما إذا كانت {أن} متقاربة فإننا نستطيع الكتابة أن:

$$\forall \in > 0 : E\, N(\in) : ن > N(\in) \Longleftarrow |أ_ن - أ_م| < \frac{\in}{2} : م > (\in)$$

$$N \Leftarrow (أ_ن - أ) < \frac{\in}{2}$$

وبملاحظة أن:

$$|أ_ن - أ_م| = |أ_ن - أ - (أ_م - أ)| \leq |أ_ن - أ| + |أ_م - أ| < \in$$

وهي كوشية تعريفاً.

مثال: برهن أن المتتالية $أ_ن = \frac{1}{ن}$ كوشية حسب التعريف.

الآن بملاحظة المقدار $|أ_{ن+ف} - أ_ن| = |\frac{1}{ن+ف} - \frac{1}{ن}| = |\frac{-ف}{ن(ن+ف)}|$

$$= \frac{ف}{ن(ن+ف)} < \in \Longleftarrow \frac{ف}{ن^2} \geq \frac{ف}{ن(ن+ف)} < \in \Longleftarrow ن^2 \geq \frac{ف}{\in} \Longleftarrow م$$

$\geq \left[\sqrt{\frac{ف}{\in}}\right]$ يكون قد تم التعريف.

وباختيار $N(\in) = \left[\sqrt{\frac{ف}{\in}}\right]$ يكون قد تم التعريف.

ملاحظات هامة:

١- إن شرط كوشي في التقارب لا يستلزم معرفة نهاية المتتالية المدروسة.

٢- يستخدم شرط كوشي في البراهين والحالات النظرية أكثر مما يستخدم في حل التمارين وذلك لوجود أساليب عملية سأسهل لإيجاد النهايات.





تمارين عامة في المتتاليات العددية:

١- أوجد النهايات التالية:

أ- $\lim_{ن \to \infty} \frac{\sqrt[3]{ن^{2}} \, جا ن!}{ن}$ بملاحظة أن | جان! | ≤ ١

المقدار $ب_{ن} = \frac{(ن)^{2/3}}{ن} = \frac{1}{(ن)^{1/3}}$ وهو لا متناه في الصغر وبالتالي فإنّ:

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{\sqrt[3]{ن^{2}} \, جا ن!}{ن} = 0$$

ب- $\lim_{ن \to \infty} \sqrt{ن+1} - \sqrt{ن}$ الآن بملاحظة أن $\lim_{ن \to \infty} \sqrt{ن+1} - \sqrt{ن} = \infty - \infty$

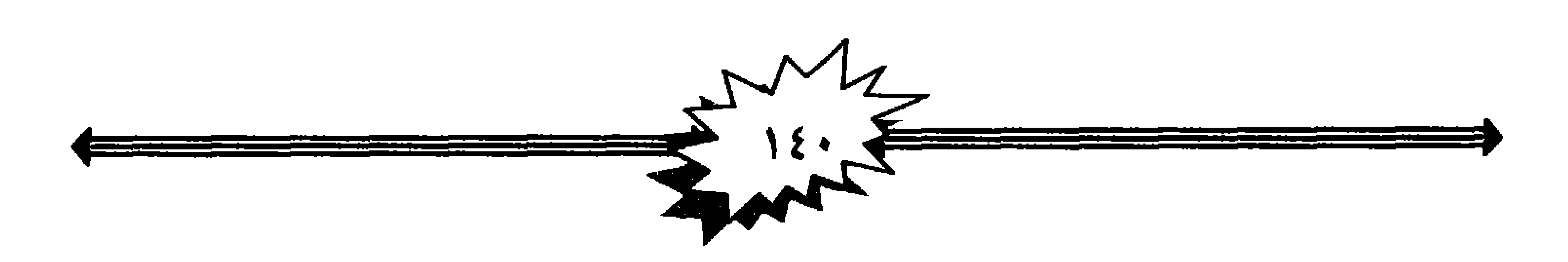
وهي حالة عدم تعيين يجب إزالتها وبملاحظة أن:

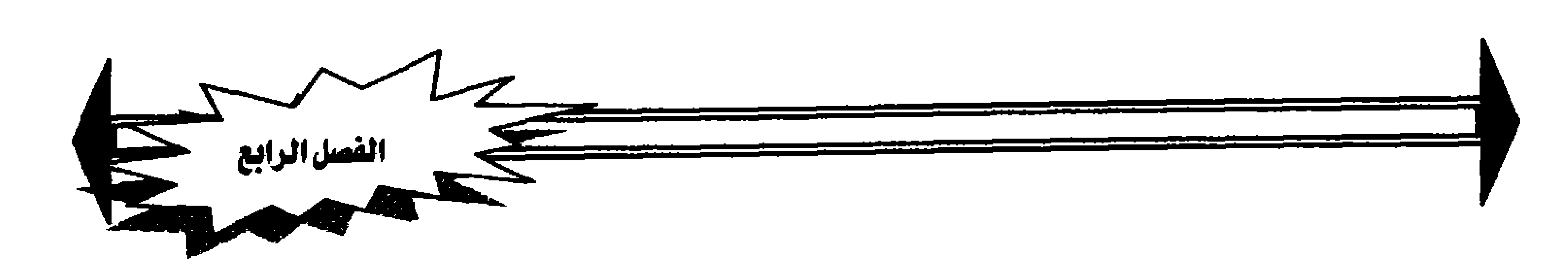
$$\lim_{ن \to \infty} \sqrt{ن+1} - \sqrt{ن} = \lim_{ن \to \infty} \sqrt{ن+1} - \sqrt{ن} \times \frac{\sqrt{ن+1} + \sqrt{ن}}{\sqrt{ن+1} + \sqrt{2}} = \lim_{ن \to \infty} \frac{1}{\sqrt{ن+1} + \sqrt{ن}} = 0$$

جـ- $\lim_{ن \to \infty} \frac{(2)^{ن}}{ن!}$ الآن بملاحظة أن $\lim_{ن \to \infty} \frac{(2)^{ن}}{ن!} = \frac{\infty}{\infty}$ وهـي حالـة عـدم تعـيين يجب إزالتها.

الآن بملاحظة أن $\lim_{ن \to \infty} \frac{(2)^{ن}}{ن!} = \lim_{ن \to \infty} \frac{(2)}{1} \cdot \frac{(2)}{2} \cdot \frac{(2)}{3} \ldots\ldots \frac{(2)}{ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{(2)}{1}$

$. \lim_{ن \to \infty} \frac{(2)}{2} \ldots\ldots \lim_{ن \to \infty} س = 0$





المتسلسلات العددية :

تعريف: نعرّف المجموع اللانهائي للمتتالية $\{أ_ن\}$ بأنه المتسلسلة العددية ونرمز لها بالشكل $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ تعريف متتالية المجاميع الجزئية المنتهية: نقول أن $ج_ن$ متتالية المجاميع الجزئية المنتهية للمتسلسلة ونكتبها بالشكل:

$ج_ن = أ_1 + أ_2 .... + أ_ن$ وبناءً على هذا التعريف فإن:

$$\sum_{1}^{\infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} ج_ن$$

المتسلسلة المتقاربة: نقول عن متسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ أنها متقاربة إذا كانت مساوية لعدد محدود مثل جـ وإذا لم تكن كذلك فإننا نقول إنها متباعدة.

ملاحظة هامة: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ هو أن تكون متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة وهذا ينتج من تعريف متتالية المجاميع الجزئية المذكور أعلاه.

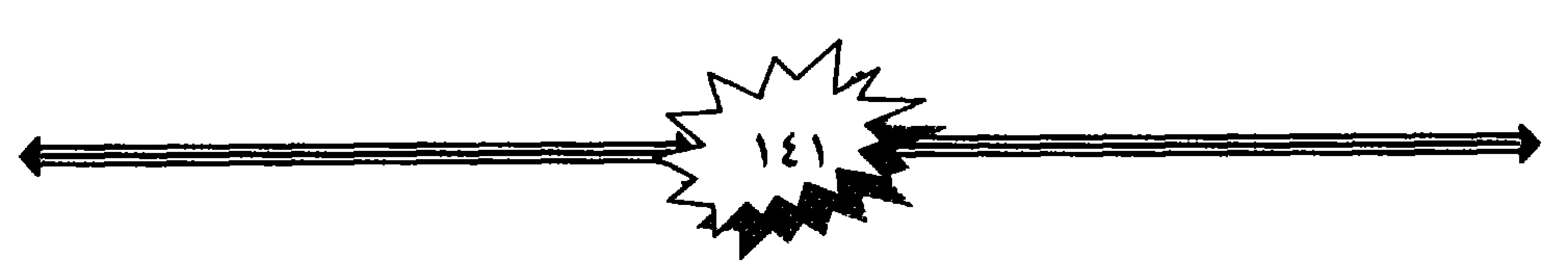
مبرهنة -١٢-: إن الشرط اللازم وغير الكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ هو أن يكون $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = 0$

البرهان: في الواقع إذا كانت $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة فإن $\sum_{1}^{\infty} ج_ن = جـ$

والآن $\{ج_ن\}$ متتالية متقاربة فإن $\lim_{ن \to \infty} ج_{ن-1} = جـ$

الآن نلاحظ بأن:

$ج_ن = أ_1 + أ_2 + ... أ_ن$



$جـ_{ن-1} = أ_1 + أ_2 + ... أ_{ن-1}$

$\underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ جـ_{ن-1} = جـ_{ن-1} = \underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ أ_ن = جـ - جـ = \cdot$

ملاحظـة: يمكـن رد دراسـة المتسلـسلات العددية الى دراسـة المتتاليـات العددية وذلك عن طريق دراسة متتالية المجاميع الجزئية.

مثال: بفرض المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$

ادرس التقارب وأوجد مجموعها، الان أذا شكلنا متتاليـة المجـاميع الجزئيـة

فان: $أ_ن = \frac{1}{ن\,(ن+1)} = \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}$ $جـ_ن = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}\right)$

$جـ_ن = 1 - \frac{1}{ن+1} \Leftarrow \underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ جـ_ن = 1 \Leftarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن\,(ن+1)} = 1$

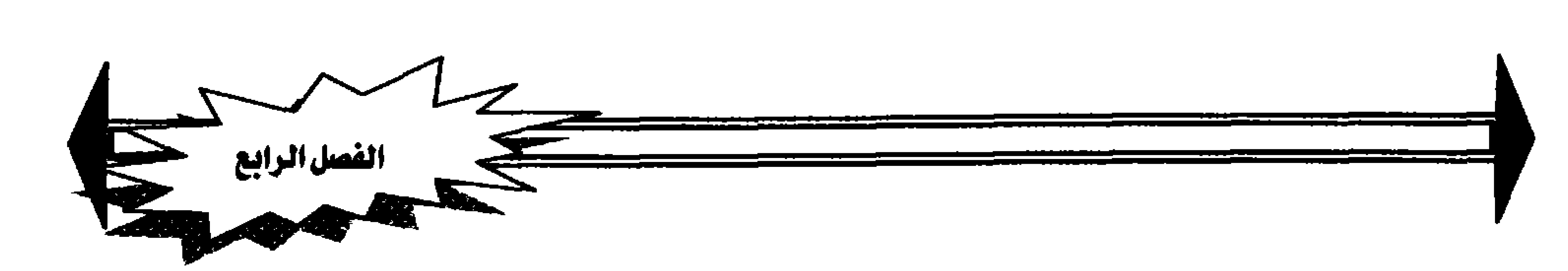
وبالتالى المتسلسلة العددية $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$ متقاربة ومجموعها يساوي العدد ١.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية $\sum_{1}^{\infty} أ\,ر^{ن-1}$

لدراسة تقارب هذه المتسلسلة نشكل جـن بالشكل: $جـ_ن = أ\left(\frac{1-ر^ن}{1-ر}\right)$، $ر \neq 1$

وفي حالة $ر=1$ المتسلسلة متباعـدة ذلـك لان $\underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ أ_ن = \underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ أ \neq \cdot$ الان لندرس حالة $ر \neq 1$ فنجد ان وذلك حسب الخواص الخطية للنهاية

$\underset{ن\to\infty}{نـهـا}\ جـ_ن = \underset{ن\to\infty}{نـهـا}\left(\left(\frac{1-ر^ن}{1-ن}\right)\right) = \frac{أ - أ\ نـهـا\ ر^ن}{1-ر}$ ،



والآن بملاحظة $\lim_{ن\to\infty} ر^{ن}$ تكون هذه النهاية موجودة ومتقاربة عندما $|ر|\geq 1$ وتكون نهايتها في هذه الحالة $\lim_{ن\to\infty} ر^{ن}=0$ وتكون نهايتها في هذه الحالة $\lim_{ن\to\infty} ر^{ن}=0$

$\lim_{ن\to\infty} ج_{ن}=\frac{م}{1-ر}=|ر|<1$, وفيما عدا ذلك تكون المتسلسلة متباعدة ,

تطبيق عددي: إن المجموع اللانهائي $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}$ موجود ومتقارب ومساوي الى

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التوافقية $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{ن}$,

والان لنشكل متتالية المجاميع الجزئية $ج_{ن}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{ن}$,

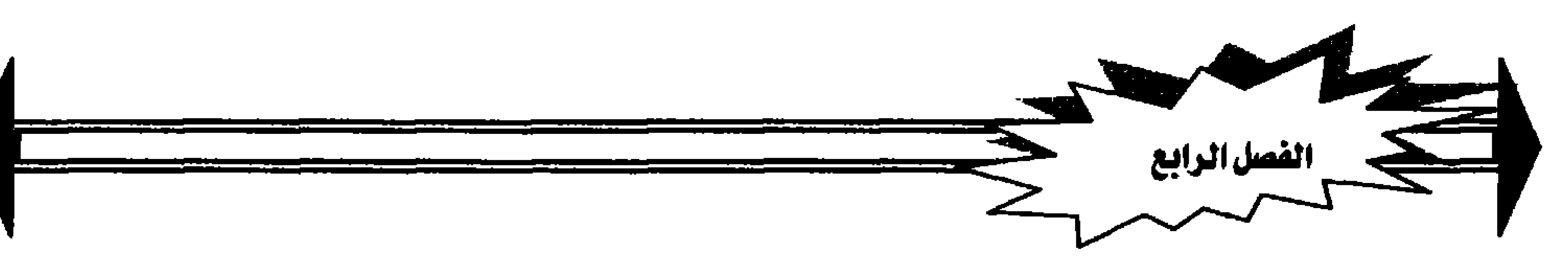
إن هذه المتتالية متزايدة كون $ج_{ن+1}-ج_{ن}=\frac{1}{ن+1}>0$

ولنلاحظ الان أن:

$$ج_{ن}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)+\ldots\ldots\ldots\frac{1}{ن}\leq$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(2\times\frac{1}{4}\right)+\left(4\times\frac{1}{8}\right)+\left(8\times\frac{1}{16}\right)+\ldots\ldots\ldots\leq$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\leq 1+\frac{م}{2}$, وبملاحظة ان $\frac{م}{2}$ مقدار غير



محدود $\{ج_ن\}$ متتالية غير محدود من الاعلى ومتزايدة , وحسب الملاحظة -١- فان $\{ج_ن\}$ متباعدة , وبالتالي $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ متسلسلة متباعدة , في الواقع يمكن يراد الشرط الخاص بتقارب $\{ج_ن\}$ بالشكل: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب $\sum_{١}^{\infty} ا_ن$ هو أن يكون:

$\forall \in > ٠ : E(\in)\ N : ن > (\in) N \Leftarrow |ج_ن - ج| < \in$ وهو تعريف تقارب المتتالية $ج_ن$.

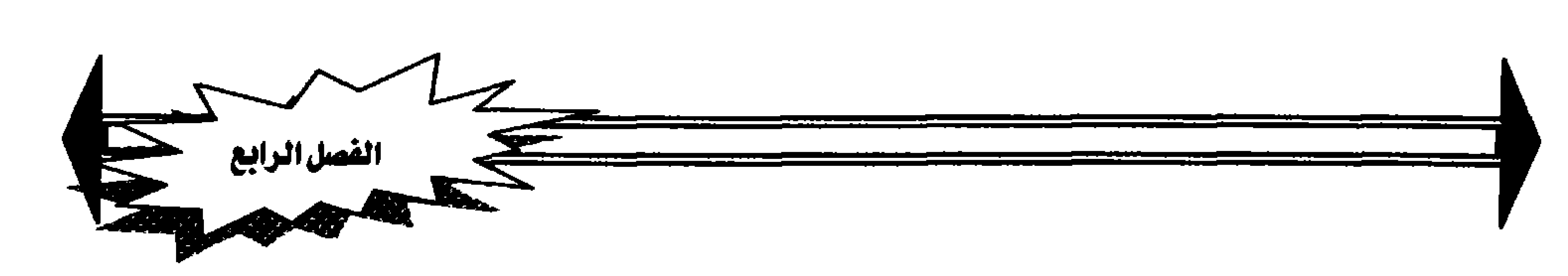
(ملاحظة هامة): أن حذف عدد منته من بداية المجموع لا يؤثر في نوعه من ناحية التقارب والمتباعد.

الخواص الخطية للمتسلسلات العددية:

١- اذا كان $\sum_{١}^{\infty} ا_ن = جـ$ ، $\sum_{١}^{\infty} ا_ن \mp ب_ن = \sum_{١}^{\infty} ا_ن = \sum_{١}^{\infty} ب_ن = جـ \mp جـ'$

٢- اذا كان $\sum_{١}^{\infty} ا_ن = جـ$ $\sum_{١}^{\infty} ا.ا_ن = ا.\sum_{١}^{\infty} ا_ن = ا.جـ$

في الواقع أن الشروط الواردة ضمن هاتين الخاصيتان هي شروط كافية وغير لازمة ,أي انه يمكن أن يتقارب المجموع $\sum_{١}^{\infty} ا_ن + ب_ن$ دون أن تكون $\sum_{١}^{\infty} ا_ن$ و $\sum_{١}^{\infty} ب_ن$ متقاربة, بفرض المتتالية $ا_ن = \frac{١}{ن}$ ان المتسلسلتان $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ ، $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن+١} = \sum_{١}^{\infty} ب_ن$ متباعدتان عندئذ وبملاحظة ان:



$\sum_{1}^{\infty} (أ_ن - ب_ن) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$ وهي متقاربة حسب ما ورد معنا في مثال سابق .

شرط كوشي لتقارب المتسلسلات العددية:

إذا حققت حـن شرط كوشي للمتتاليات أي كانت $\{جـ_ن\}$ كوشية – عندئذ- فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة ويمكن كتابة الشرط بالشكل:

$$\forall \in > 0 \ \exists \ N(\in) : ن ، م > N(\in) \Longrightarrow |جـ_م - جـ_ن| < \in$$

$$\Longrightarrow \left| \sum_{1}^{م} أ_ك - \sum_{1}^{ن} أ_ك \right| < \in \Leftarrow \left| \sum_{ن+1}^{م} أ_ك \right| < \in$$

وهو شرط كوشي لتقارب المتسلسلات العددية.

معايير تقارب المتسلسلات العددية:

سنقسم معايير التقارب من حيث إشارة المتسلسلات إلى ثلاثة أقسام:

١ – المتسلسلات ذات الإشارة الموجبة:

تعريف: نقول أن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متسلسلة ذات إشارة موجبة إذا كانت $\forall_ن : أ_ن > 0$

أ- المعيار الأول: يعتمد هذا المعيار على المبرهنة -٣- على تعريف متتالية المجاميع الجزئية وذلك بملاحظة أنه إذا كانت $أ_ن > 0 \Longrightarrow$ جـن الخاصة بها متتالية متزايدة فإذا كانت $\{جـ_ن\}$ محدودة أمكن الجزم بأنها متقاربة وبالتالي أمكن الجزم بأن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.



ب- معايير المقارنة:

١- إذا كان $أ_ن \le ب_ن$ ولو بدءاً من حد معين عندئذ إذا كانت

أ- $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متقاربة فإن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة وذلك لأن إذا كانت $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متقاربة $\Longleftarrow$

$جَ_ن = ب_1 + ب_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots ب_ن$ متقاربة لكن $أ_ن \le ب_ن \Longleftarrow جَ_ن \le$ $أ_ن + \ldots\ldots + أ_1 = ج_ن$ وجـن متزايدة ومحدودة وبالتالي متقاربة $\Longleftarrow$ $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.

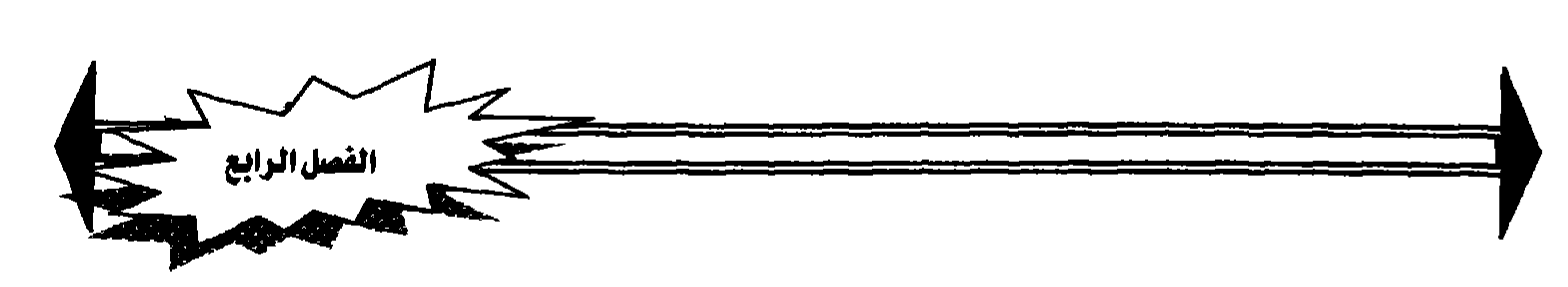
ب- إذا كانت $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متباعدة فإن $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متباعدة وذلك لأن $جَ_ن$ متزايدة ولدينا أيضاً أن $جَ_ن \le ج_ن$ و $ج_ن$ متباعدة حسب الفرض $\Longleftarrow جَ_ن$ متباعدة $\Longleftarrow \sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متباعدة.

٢- إذا $م \le \frac{أ_ن}{ب_ن} \le ه$ فإن المتسلسلتان $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ ، $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ من نوع واحد حيث التقارب والتباعد في الواقع إذا كتبنا $م . ب_ن \le أ_ن \le ه . ب_ن$

فإذا كانت $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متباعدة فإنه بتطبيق المعيار (١) الحالة ب نجد أن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متباعدة.

وإذا كانت $\sum_{1}^{\infty} ب_ن$ متقاربة فإنه بتطبيق المعيار د١) الحالة أ نجد أن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.

٣- إذا كانت $\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = ل$ حيث $\infty > ل > 0$ فإن المتسلسلتان $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$



و $\sum_{1}^{\infty}$ ب$_{ن}$ من نوع واحد نثبت هذا المعيار بسهولة إذا لاحظنا أن $\in >$ $\left| \frac{أ_{ن}}{ب_{ن}} - ل \right|$

$$\Longleftarrow - \in < \frac{أ_{ن}}{ب_{ن}} - ل < \in \Longleftarrow ل - \in < \frac{أ_{ن}}{ب_{ن}} < ل + \in$$

وبتطبيق المعيار -٢- نجد النتيجة:

٤- إذا كان $\frac{ب_{ن+١}}{ب_{ن}} \leq \frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}}$ ولو بدءاً من حد معين فإن تقارب $\sum_{1}^{\infty}$ ب$_{ن}$ يؤدي إلى تقارب $\sum_{1}^{\infty}$ أ$_{ن}$ وذلك لأنه بملاحظة أن $\frac{ب_{٢}}{ب_{١}} \leq \frac{أ_{٢}}{أ_{١}}$ ، $\frac{ب_{٣}}{ب_{٢}} \leq \frac{أ_{٣}}{أ_{٢}}$ ...

$$\frac{ب_{ن+١}}{ب_{ن}} \times \dots \times \frac{ب_{٣}}{ب_{٢}} \times \frac{ب_{٢}}{ب_{١}} \leq \frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} \times \dots\dots \times \frac{أ_{٣}}{أ_{٢}} \times \frac{أ_{٢}}{أ_{١}}$$

$$\frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} \geq \frac{ب_{ن+١}}{ب_{ن}} \Longleftarrow أ_{ن+١} > \frac{أ_{١}}{ب_{١}} . ب_{ن+١}$$

وبتطبيق معيار المقارنة الأول نجد المطلوب.

٥- إذا كانت $١ > (ك)^{ن} \leq أ_{ن}$ حيث $١ > ك$ ولو بدءاً من حد معين فإن $\sum_{1}^{\infty}$ أ$_{ن}$ متقاربة وذلك لأن $(ك)^{ن}$ هو الحد النوني لمتسلسلة هندسية متقاربة لأن $١ > |ك|$ وحسب معيار المقارنة الأول نجد أن $\sum_{1}^{\infty}$ أ$_{ن}$ متقاربة.





أمثلة وتطبيقات:

١- بفرض لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^2}$ ادرس التقارب:

الحل: إذا أجرينا مقارنة هذه المتسلسلة مع المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$ حسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- نجد أن $\frac{1}{ن(ن+1)} \Longleftarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(ن+1)^2}$ متقاربة.

ولكن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(ن+1)^2}$

وحذف حد لا يؤثر في التقارب $\Longleftarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^2}$ متقاربة.

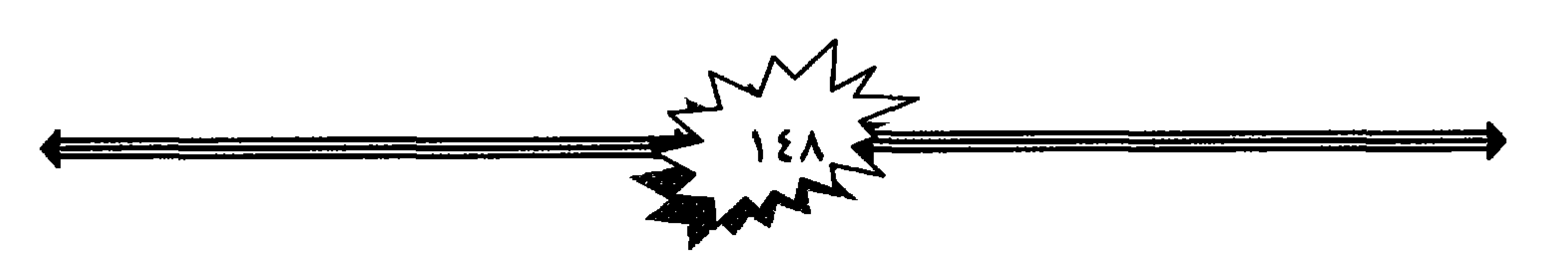
٢- ادرس فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ت هـ $\frac{1}{ن}$ متقاربة.

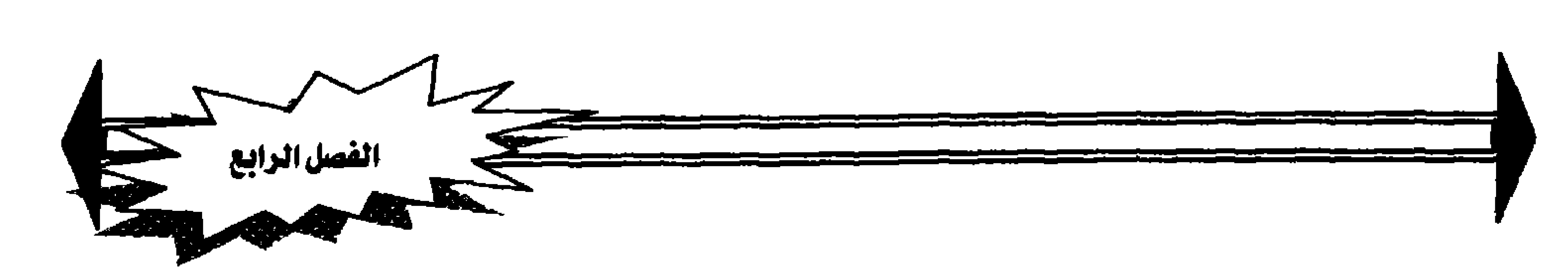
الحل: أن $\frac{1}{ن} < \frac{1}{ن}$ هـ ت والمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن}$ متباعدة وبالتالي وحسب معيار المقارنة الأول الحالة –ب- فإن $\sum_{1}^{\infty}$ت هـ $\frac{1}{ن}$ متباعدة.

٣- إذا نظرنا إلى المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ن}}$ نجد أن $\frac{1}{\sqrt{ن}} > \frac{1}{ن}$

وحسب معيار المقارنة الأول الحالة - ب- فإن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ن}}$ متباعدة لأن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن}$ متباعدة.

٤- بملاحظة المتسلسلة $أ \in ح : \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^{أ}}$ إن هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة ريمان، الآن لندرس تقارب هذه المتسلسلة.





أولاً: لنلاحظ أنه إذا كان $\text{أ} < ٠ \Longleftarrow \lim_{ن\to\infty} \frac{١}{ن^{\text{أ}}} = \infty$ وبالتالي المتسلسلة متباعدة حسب مبرهنة الشرط اللازم للتقارب.

أيضاً إذا كانت $\text{أ} = ٠ \Longleftarrow \lim_{ن\to\infty} \frac{١}{ن^{٠}} \sum_{١}^{\infty} ١ = \infty$ متباعدة أيضاً.

ثانياً: لنناقش الحالة $٠ \le \text{أ} \le ١ \Longleftarrow \frac{١}{ن^{\text{أ}}} \ge \frac{١}{ن} > ٠$ ولدينا المتسلسلة $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ متباعدة $\Longleftarrow \sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن^{\text{أ}}}$ متباعدة حسب معيار المقارنة الأول الحالة -ب-.

ثالثاً: الحالة $\text{أ} > ١$ نجد أنه إذا استخدمنا معيار المقارنة الثالث $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ المتباعدة

نجد أن $\lim_{ن\to\infty} ن^{\text{أ}-١} = \lim_{ن\to\infty} \frac{\frac{١}{ن}}{\frac{١}{ن^{\text{أ}}}} = \infty \Longleftarrow$ المتسلسلتان $\sum \frac{١}{ن^{\text{أ}}}$، $\sum \frac{١}{ن}$،

ليستا من نوع واحد.

الخلاصة: تكون متسلسلة ريمان $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن^{\text{أ}}}$، متقاربة فقط إذا كان $\text{أ} > ١$ وما عدا ذلك تكون متباعدة.

أمثلة وتطبيقات: برهن التقارب وأثبت كلاً من العلاقات التالية:

$$١- I_1 = \sum_{١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١}}{(٢)^{ن-١}} = \frac{٢}{٣} \qquad ٢- I_2 = \sum_{١}^{\infty} \frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+١)} = \frac{١}{٣}$$

الحل: ١- من أجل $\sum_{١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١}}{(٢)^{ن-١}}$ لتشكل متتالية المجاميع الجزئية بالشكل:

$$جـ_ن = \frac{١}{٢^{٠}} - \frac{١}{(٢)^{١}} + \frac{١}{(٢)^{٢}} + \frac{١}{(٢)^{٣}} + \frac{١}{(٢)^{٤}}$$



$$= \left(\frac{١}{٢^{٠}} + \frac{١}{(٢)^{٢}} + \frac{١}{(٢)^{٤}} .... \right) - \left(\frac{١}{(٢)^{١}} + \frac{١}{(٢)^{٣}} + ... \right)$$

الآن بالنسبة للمقدار $\left(\frac{١}{(٢)^{٠}} + \frac{١}{(٢)^{٢}} + ... \right)$ هو متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ١ وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$ $\Leftarrow$ مجموعها يساوي $\frac{١}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٤}{٣}$

أما المقدار $\left(\frac{١}{(٢)^{١}} + \frac{١}{(٢)^{٣}} .... \right)$ متسلسلة هندسية حدها الأول $أ_{١} = \frac{١}{٢}$ وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$ $\Leftarrow$ مجموعها يساوي $\frac{١}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \sum_{١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١}}{(٢)^{ن-١}} = \frac{٢}{٣}$

$$\lim_{ن \to \infty} جـ_{ن} = \frac{٤}{٣} - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}.$$

٢- بالنسبة للمتسلسلة $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+١)} = \frac{١}{٣}$ فإن حدها العام يمكن كتابته

$أ_{ن} = \frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+١)} = \frac{١}{٣} \left[\frac{١}{٣ن-٢} - \frac{١}{٣ن+١} \right]$ وبتشكيل الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية المنتهية نجد أن:

$$جـ_{ن} = \frac{١}{٣} . \left[\left(١ - \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٧}\right) + \frac{١}{٧} + ... \left(\frac{١}{٣ن-٢} - \frac{١}{٣(ن+١)-٢} \right) \right]$$

$$= \frac{١}{٣} \left[١ - \frac{١}{٣(ن+١)-٢} \right] \Leftarrow \lim_{ن \to \infty} جـ_{ن}$$

$$= \frac{١}{٣} \Leftarrow \sum_{١}^{\infty} \frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+١)} = \frac{١}{٣}$$

جـ- معايير شهيرة للمتسلسلات الموجبة:

أ- معيار دالامبير:

نلخص معيار دالامبير بالشكل:

أولاً: نكتب حد دالامبير للمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ بالشكل $ل_ن = \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن}$.

ثانياً: نحسب نهاية حد دالامبير $\underset{ن\to\infty}{نها}\ ل_ن = ل$.

ونميز الحالات الثلاثة التالية:

أ- إذا كان $١ > ل$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة.

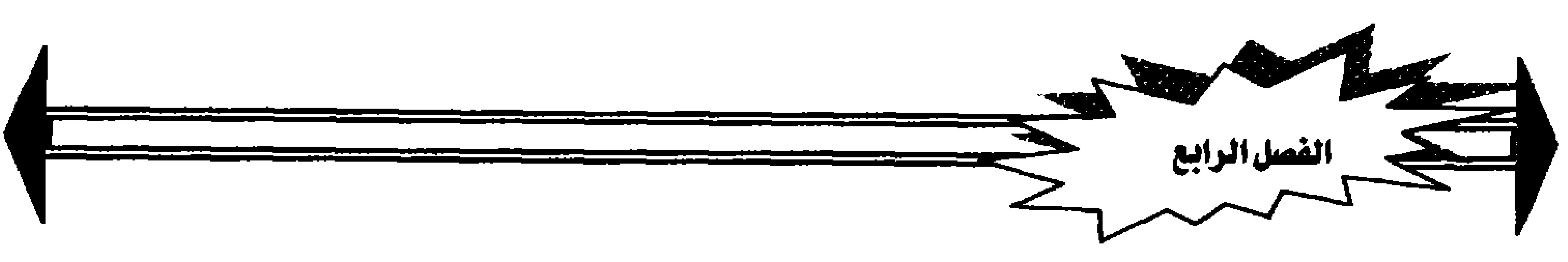
ب- إذا كان $١ < ل$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة.

ج- إذا كان $١ = ل$ يفشل هذا المعيار.

البرهان: بالنسبة للحالة -أ- فإنه إذا كانت $١ > \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن}$ بدءاً من حد معين فإن $١ > ل > \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن}$ وبملاحظة أن:

$$ل = \frac{ل^{ن+1}}{ل^{ن}} \Leftarrow \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} > \frac{ل^{ن+1}}{ل^{ن}} \qquad ....(*)$$

وبالنظر إلى المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} ل^{ن}$ نجد أنها هندسية فيها $١ > ل$ وبالتالي فهي متقاربة. وبتطبيق معيار المقارنة الرابع على العلاقة (*) والأخذ بعين الاعتبار تقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} ل^{ن}$ نجد أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.



بالنسبة للحالة -ب- فإنه إذا كان لدينا $١ < \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$ فإنه بدءاً من حد معين نجد أن:

$ل < ⟨ < \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$ وبمناقشة $\sum_{١}^{\infty} ⟨^ن$ الهندسية المتباعدة وإجراء معيار المقارنة الرابع نجد أن $\sum_{١}^{\infty} أ_ن$ متباعدة.

بالنسبة للحالة -جـ- تبرر على أساس أنه بالنسبة للمتسلسلة المتباعدة $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ نجد أن $\underset{ن\to\infty}{نها} \frac{ن}{ن+١} = ١ = \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{١+\frac{١}{ن}}{\frac{١}{ن}} = \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$ وبالنسبة للمتسلسلة المقارنة $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن^٢}$ نجد أن: $\underset{ن\to\infty}{نها} \frac{١/(ن+١)^٢}{١/ن^٢} = \underset{ن\to\infty}{نها} \frac{(ن)^٢}{(ن+١)^٢} = ١$

وبالتالي حصلنا على النتيجة $\underset{ن\to\infty}{نها} ⟨ = ١$ من أجل متسلسلة متقاربة وأخرى متباعدة وبالتالي فلا يمكننا الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة إذا كان $\underset{ن\to\infty}{نها} ⟨_ن = ١$

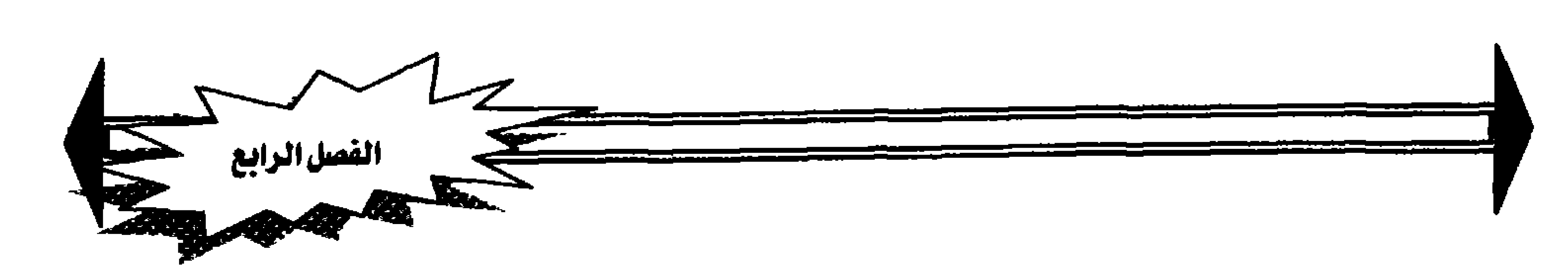
٢- معيار كوشي الجذر النوني:

نورد هذا المعيار بالشكل:

أولاً نشكل حد كوشي $\sqrt[ن]{أ_ن} = ص_ن$ وبأخذ $\underset{ن\to\infty}{نها} \sqrt[ن]{أ_ن} = ص$ نميز الحالات التالية:

أ- إذ كان $ص < ١$ فإن المتسلسلة $\sum_{١}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.





ب- إذا كان ص > ١ فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} ا_ن$ متباعدة.

جـ- إذا كان ص = ١ فإن المعيار يفشل.

البرهان: من أجل الحالة -أ- نلاحظ أنه إذا كان ١ > $\lim_{ن\to\infty} \sqrt[ن]{ا_ن}$ ⟸ يوجد ك بحيث أنه بدءاً من حد معين يكون ١ > ك > $\sqrt[ن]{ا_ن}$ ⟸ ١ > $(ك)^ن$ > $ا_ن$ وحسب معيار المقارنة الخامس نجد أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} ا_ن$ متقاربة، أما من أجل -ب- نلاحظ أنه إذا كانت ١ < $\lim_{ن\to\infty} \sqrt[ن]{ا_ن}$ فله يوجد ك بحيث أن بدءاً من حد معين نجد أن $\sqrt[ن]{ا_ن}$ > ك > ١ ⟸ $ا_ن$ > $(ك)^ن$ > ١

وبملاحظة أن $\sum (ك)^ن$ متسلسلة هندسية متباعدة لأن ل > ك وحسب معيار المقارنة الأول الحالة -ب- نجد أن $\sum_{1}^{\infty} ا_ن$ متباعدة.

ومن أجل الحالة -جـ- فإننا نجد أنه من أجل المتسلسلة المتباعدة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن}$ والمتسلسلة المتقاربة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^2}$ أن $\lim_{ن\to\infty} ص_ن = 1$

وبالتالي فإننا في هذه الحالة لا نستطيع الحكم على تقارب المتسلسلة.

٣- معيار راب:

نشكل أولاً حد راب $\left(1 - \frac{ا_ن}{ا_{ن+1}}\right)$. ن = $ر_ن$ ونحسب النهاية $\lim_{ن\to\infty} ر_ن = ز$ ونميز الحالتين التاليتين:

أ- إذا كان ١ < ز تكون المتسلسلة متقاربة.





ب- إذا كان $1 \leq ز$ تكون المتسلسلة متباعدة.

البرهان: بالنسبة للحالة -أ- نجد أن إذا كان $1 \leq$ نها$_ن$ فإنه بدءاً من حد معين نجد أن:

$$ن\left(\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - 1\right) > 1 \Longleftarrow \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} > \frac{1}{ن} + 1 = \frac{ن+1}{ن} \Longleftarrow \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} < \frac{ن}{ن+1} < \frac{ن^{جـ}}{(ن+1)^{جـ}}$$

وباختيار المتسلسلة المتقاربة $\sum \frac{1}{ن^{جـ}}$ ؛ $1 <$ جـ وتطبيق معيار المقاربنة الرابع على الحالة التي لدينا نجد أن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متقاربة.

أما من أجل الحالة -ب- نجد أن $\frac{1}{ن} + 1 \leq \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}}$

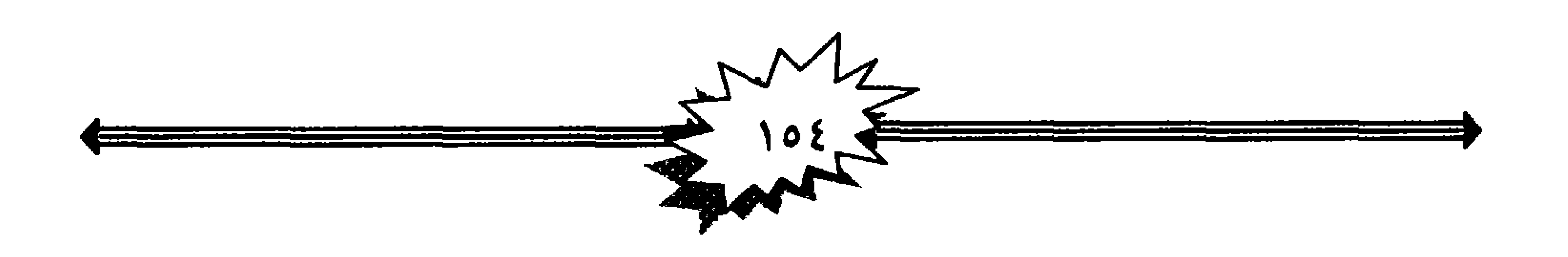
$$\Longleftarrow \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} \leq \frac{ن+1}{ن} \Longleftarrow \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} \geq \frac{ن}{ن+1} = \frac{\frac{1}{ن+1}}{\frac{1}{ن}}$$

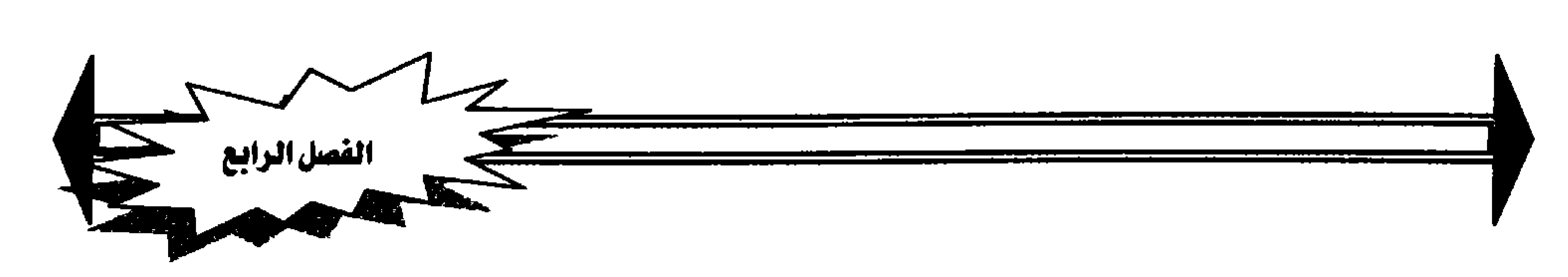
وبملاحظة أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن}$ متباعدة وحسب معيار المقارنة الرابع نجد أن $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ متباعدة.

٤- معيار كومير:

نشكل أولاً الحد $ك_ن = ص_ن \cdot \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - ص_{ن+1}$ حيث $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ص_ن}$ متباعدة ومن ثم نحسب النهاية $\lim_{ن \to \infty} ك_ن =$ ك ونميز الحالتين:

أ- إذا كانت $1 <$ ك فإن المتسلسلة متقاربة.





ب- إذا كانت $1 \le$ ك فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان: من أجل الحالة -أ- نجد أنه إذا كان $\lim_{ن\to\infty}$ ك$_ن > 0 \Longleftarrow$ فإنه بدءاً من حد معين نجد أن:

$$ك_ن > 0 \Longleftarrow ص_ن \cdot \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - ص_{ن-1} > 1 \Longleftarrow ص_ن \cdot \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - ص_{ن+1} > 0$$

$$\Longleftarrow ص_ن\, أ_ن - ص_{ن+1} \cdot أ_{ن+1} > 0 \Longleftarrow ص_ن \cdot أ_ن > ص_{ن+1}\, أ_{ن+1}$$

وبالتالي الحد ل$_ن$=ص$_ن$. أ$_ن$ متناقص ومحدود من الأدنى بالصفر $\Longleftarrow$

$\lim_{ن\to\infty}$ ص$_ن$. أ$_ن$ = 0 ولدينا المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ (ص$_ن$. أ$_ن$ − ص$_{ن+1}$ أ$_{ن+1}$) ذات متتالية مجاميع جزئية لها الشكل: جـ$_ن$ = (ص$_1$ أ$_1$ − ص$_2$ أ$_2$) + (ص$_2$ أ$_2$ − ص$_3$ أ$_3$) + ... (ص$_ن$ أ$_ن$ − ص$_{ن+1}$. أ$_{ن+1}$) = (ص$_1$ أ$_1$ − ص$_{ن+1}$. أ$_ن$)

$\Longleftarrow \lim_{ن\to\infty}$ جـ$_ن$ = أ$_1$.ص$_1$، الآن بملاحظة أن $1 <$ ك $<$ ص$_ن \cdot \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}}$ − ص$_{ن+1}$

$$\Longleftarrow ك\, أ_{ن+1} < ص_ن \cdot أ_ن - ص_{ن+1} \cdot أ_{ن+1}$$

وباعتبار أن $\sum_{1}^{\infty}$ ص$_ن$ أ$_ن$ − ص$_{ن+1}$ أ$_{ن+1}$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ أ$_ن$ متقاربة حسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ-.

أما من أجل الحالة -ب-: نجد إذا كانت $1 \le$ ص$_ن \cdot \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}}$ − ص$_{ن+1}$

$$\Longleftarrow \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} \ge \frac{ص_{ن+1}}{ص_ن} \Longleftarrow \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} \le \frac{ص_ن}{ص_{ن+1}} = \frac{1/ص_{ن+1}}{1/ص_ن}$$



وباعتبار أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{ص_ن}$ متباعدة فرضاً فإنه وحسب معيار المقارنة الرابع فإن $\sum_{1}^{\infty}$ $أ_ن$ متباعدة.

٥- معيار غاوس:

إذا أمكن كتابة الحد $\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}}$ بالشكل: $\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} = \lambda + \frac{\mu}{ن} + \frac{\theta_ن}{ن^2}$

حيث $\theta_ن$ ، λ، $\mu \in ح$ مقدار محدود عندئذ فإن:

أ- تكون $\sum_{1}^{\infty}$ $أ_ن$ متقاربة إذا كانت $1 < \lambda$ أو $[1 = \lambda ، 1 < \mu]$

ب- تكون $\sum_{1}^{\infty}$ $أ_ن$ متقاربة إذا كانت $1 > \lambda$ أو $[1 = \lambda ، 1 \geq \mu]$

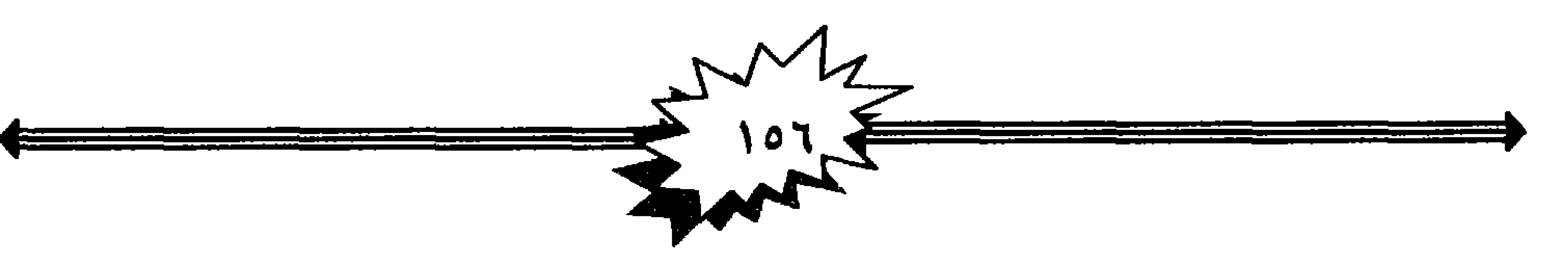
البرهان: بالنسبة للحالة -أ- نجد أنه إذا كان $1 < \lambda$ فإن $1 < \lambda < \frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} \Leftarrow$

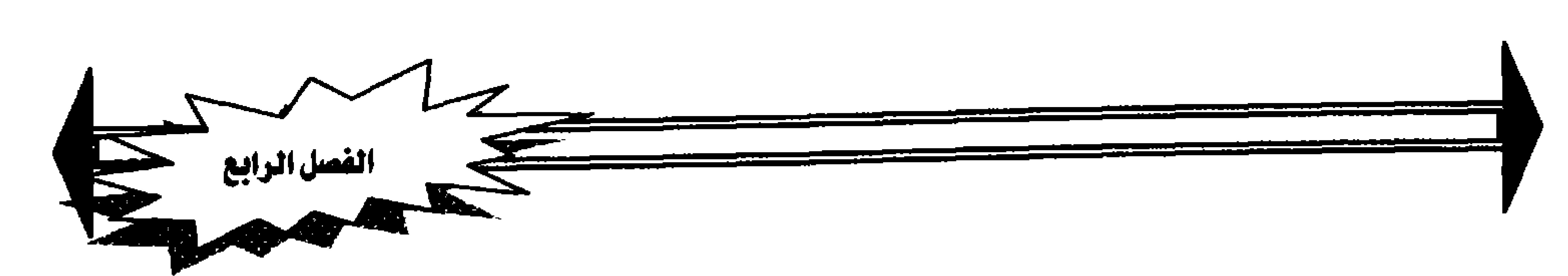
$1 > \lambda > \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن}$ وحسب معيار دالامبير نجد أن $\sum_{1}^{\infty}$ $أ_ن$ متقاربة.

أما إذا كان $\lambda = 1$ عندئذ فإنه وحسب معيار راب نجد أن: $\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} = 1 + \frac{\mu}{ن} + \frac{\theta_ن}{ن^2}$

$\Leftarrow ن \left(\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - 1 \right) = \frac{\theta_ن}{ن} + \mu$

فإذا كان $1 < \mu \Leftarrow$ يصبح لدينا $\lim_{ن \to \infty} ن \left(\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} - 1 \right) = \lim_{ن \to \infty} ر_ن$ وبالتالي





حسب معيار راب نجد أن $\sum_{1}^{\infty}$ $ا_ن$ متقاربة.

بالنسبة للحالة -ب-: نجد أنه إذا كان $1 < \lambda$ فإن $1 < \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{ا_ن}{ا_ن+1}$

وحسب معيار دالامبير

$\Longleftarrow 1 < \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{ا_ن}{ا_ن+1}$ فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ $ا_ن$ متباعدة.

أما إذا كان $\lambda = 1$ فإن $\frac{ا_ن}{ا_ن+1} = 1 + \frac{\mu}{ن} + \frac{\theta_ن}{ن^2} \Longleftarrow ن \left(\frac{ا_ن}{ا_ن+1} - 1\right) =$

$\mu + \frac{\theta_ن}{ن} \Longleftarrow \underset{ن \to \infty}{نها} ر_ن = \mu \leq 1 \Longleftarrow$ المتسلسلة حسب معيار راب متباعدة.

٦- معيار كوشي التكاملي:

بفرض لدينا $\sum_{1}^{\infty}$ $ا_ن$ متسلسلة ذات حدود موجبة عندئذ بفرض لدينا التابع ق(س) بحيث أن ق(ن) = $ا_ن$ عندئذ إذا أوجدنا التكامل $\int_{ا}^{\infty}$ ق(س), د س

وكان موجوداً فإن المتسلسلة متقاربة وإذا كان غير موجودة فإن المتسلسلة متباعدة وإذا كان ق(س) تابعاً أصلياً للتابع ق(س) فإن

$$\int_{ا}^{\infty} ق(س), د س = \underset{س \to \infty}{نها} ق(س) - ق(ا).$$

٧- المعيار التلسكوبي:

بفرض لدينا $\sum_{1}^{\infty}$ $ا_ن$ وأمكن كتابة حدود {$ا_ن$} على شكل فرق تقدمي للمتتالية المتناقصة{$ب_ن$} بالشكل $ا_ن = ب_ن - ب_{ن+1}$ عندئذ فإن المتسلسلة{$ا_ن$}





والمتتالية $\{ب_ن\}$ من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

البرهان: بملاحظة أن $أ_ن = ب_ن - ب_{ن+1}$ ولنشكل متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$.

$جـ_ن = أ_1 + أ_2 + أ_3 + ... أ_ن \Longrightarrow جـ_ن = (ب_1 - ب_2) + (ب_2 - ب_3) + ... (ب_ن - ب_{ن+1})$

$\Longrightarrow جـ_ن = ب_1 - ب_{ن+1}$

$\Longrightarrow \{ب_ن\}، \{جـ_ن\}$ من نوع واحد.

$\Longrightarrow$ المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ و $\{ب_ن\}$ من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

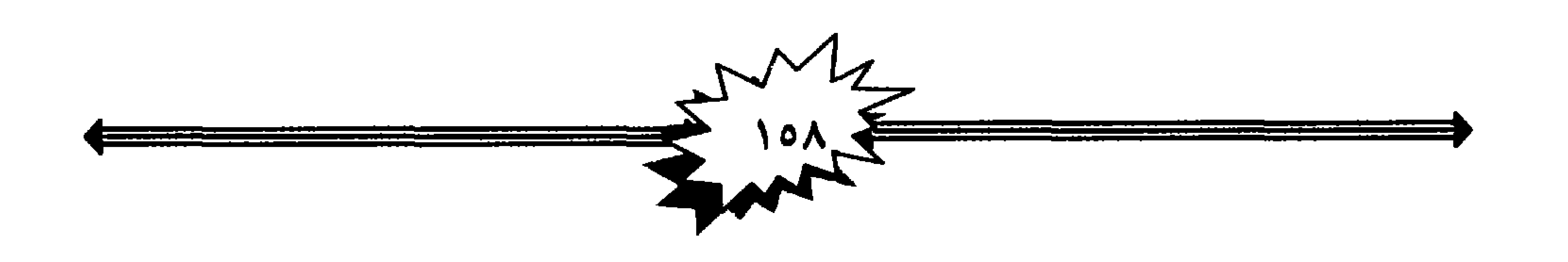
مثال: $أ_ن = \frac{1}{ن(ن+1)}$ إذا فرضنا $ب_ن = \frac{1}{ن}$ نجد أن $أ_ن = \frac{1}{ن} - \frac{1}{(ن+1)} = ب_ن - ب_{ن+1}$

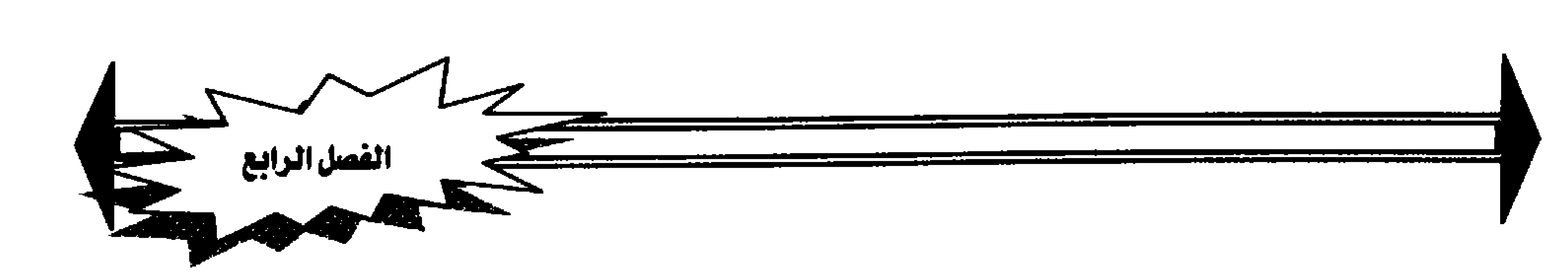
$\Longrightarrow \sum_{1}^{\infty} أ_ن$ و $\{ب_ن\}$ من نوع واحد ولدينا $\underset{ن \to \infty}{نها} = صفر \Longrightarrow \{ب_ن\}$ متقاربة.

$\Longrightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$ متقاربة.

٨- معيار كوشي من أجل المتسلسلات المتناقصة.

إذا كانت لدينا $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ حيث $\{أ_ن\}$ متتالية متناقصة فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن$ والمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} 2^ن (أ_{ن})^ن$ نوع واحد.





٩- معيار كوشي المصمم من أجل المتسلسلات المتناقصة "وهذا المعيار من عملنا".

إذا كان لدينا $\sum_{1}^{\infty}$ أن حيث { أن } متتالية متناقصة عندئذ فإننا نميز الحالتان:

١- إذا كان $أ_٢ < \frac{١}{٢}$ ⟸ المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ أن متقاربة.

٢- إذا كان $أ_٢ \geq \frac{١}{٢}$ ⟸ المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}$ أن متباعدة.

ملاحظات هامة على معايير التقارب للمتسلسلات الموجبة:

١- يعتبر معيار كومير حالة عامة لكلاً من معيار دالامبير ومعيار راب ذلك لأنه:

أ- إذا اخترنا $ص_ن = ١$ ⟸ $١ - \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}} = ك_ن$. وعندها إذا كان $ك_ن > ٠$ ⟸

$٠ < ١ - \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ ⟸ $١ > \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ ⟸ $١ < \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$ ⟸ $١ > \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$

والمتسلسلة متقاربة حسب دالامبير.

وإذا كان $٠ > ك_ن$ ⟸ $٠ > ١ - \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ ⟸ $١ < \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ ⟸ $١ >$ $\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}$ ⟸ $١ < \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ والمتسلسلة متباعدة. حسب دالامبير.

ب- إذا اخترنا $ص_ن = ن$ ⟸ $(ن + ١) - ن \left(\frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}\right) = ك_ن = ن \left(١ - \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}\right)$ $+ ١ = ر_{ن+١}$ وبنفس المناقشة السابقة نحصل على المطلوب.



٢- يعتبر معيار غاوس أيضاً معياراً عاماً لكل من معيار دالامبير وراب وذلك إذا أخذنا بعين الاعتبار أنه من أجل: -أ- معيار راب: نجعل $\theta_{ن} = ٠$ و $\lambda = ١$ فنحصل على شروط راب.

ب- معيار دالامبير: نجعل $\theta_{ن} = ٠$ و $\mu = ٠$ فنحصل على شروط دالامبير.

٣- يكون معيار الأمبير صغيراً في حالات وجود المؤثر العاملي أو الأسس من الشكل $أ^{ن}$ في الحد العام للمتسلسلة.

٤- يكون معيار كوشي - الجذر النوني: مفيداً في حالات وجود الأسس من الشكل $ن^{ن}$ أو $أ^{ن}$ في الحد العام للمتسلسلة.

٥- إذا فشل معيار دالامبير في كشف نوع المتسلسلة فإن معيار كوشي سيفشل حتماً والعكس غير صحيح بالضرورة.

وهذا نعبر عنه بالشكل إذا كان $\underset{ن \to \infty}{نها} د_{ن} = ١ \Longleftarrow \underset{ن \to \infty}{نها} ص_{ن} = ١$

٦- يمكن استخدام معيار كوشي التكاملي في مجالات يكون فيها الحد العام للمتسلسلة معقداً ومرهقاً حسب المعايير الأخرى.

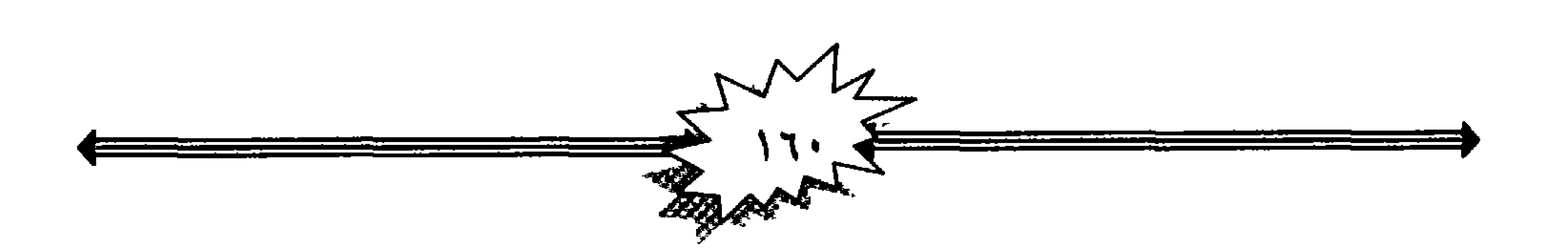
أمثلة وتطبيقات: ادرس تقارب كلاً من المتسلسلات العددية التالية:

١- $\sum_{١}^{\infty} \frac{(ن!)^{٢}}{(٢ن)!!}$

٢- $\sum_{١}^{\infty} \frac{ن^{٢}}{\left(٢ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}}$

٣- $\sum_{١}^{\infty} \left[\frac{(٢ن-١)!!}{(٢ن)}\right]^{٣}$

٤- $\sum_{١}^{\infty} \frac{ن!\,هـ^{ن}}{ن^{ن}+٣}$





٥- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن(لو ن)^{2}}$

الحل: بالنسبة لـ ١- بملاحظة حد دالامبير $د_ن = \frac{\frac{((ن+1)!)^{2}}{(2(ن+1))!}}{\frac{(ن!)^{2}}{(2ن)!}}$

$\Longleftarrow د_ن = \frac{((ن+1)!)^{2}}{(2ن+2)!} \times \frac{(2ن)!}{(ن!)^{2}} = \frac{(ن+1)^{2}}{(2ن+2)(2ن+1)}$

المتسلسلة متقاربة لأن $\lim_{ن\to\infty} د_ن \frac{(ن+1)^{2}}{(2ن+2)(2ن+1)} = \frac{1}{4} > 1$

بالنسبة لـ ٢- نلاحظ أن حد كوشي $ص_ن = \sqrt[ن]{\frac{ن^{2}}{\left(2+\frac{1}{2}\right)^{2}}} - \frac{\sqrt[ن]{ن^{2}}}{2+\frac{1}{ن}}$

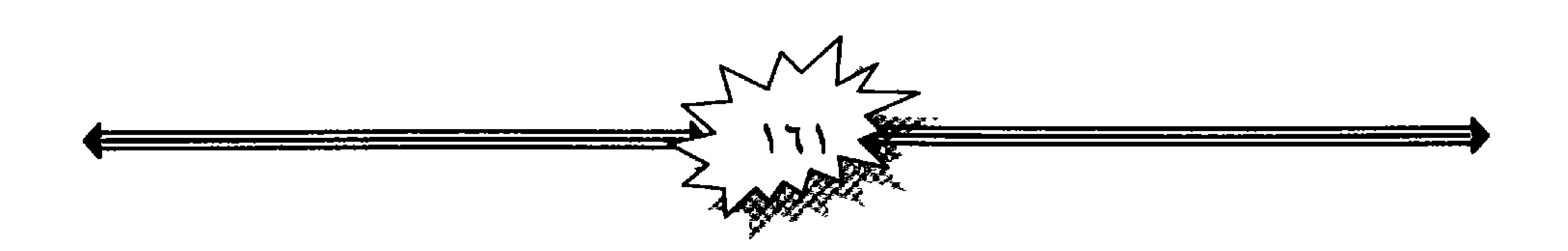
$\lim_{ن\to\infty} ص_ن = \lim_{ن\to\infty} \frac{\sqrt[ن]{ن^{2}}}{2+\frac{1}{ن}} = \frac{1}{2} > 1 \Longleftarrow$ المتسلسلة متقاربة

بالنسبة لـ ٣- بملاحظة معيار غاوس والتركيب:

$\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}} = \left[\frac{(2ن-1)!!}{(2ن)\ !!}\right]^{2} \div \left[\frac{(2ن+1)!!}{(2ن+2)!!}\right] = \left[\frac{(2ن-1)!!}{(2ن)!!} \times \frac{(2ن+2)!!}{(2ن+1)}\right]^{2} =$

$\left[1+\frac{أ_ن}{أ_{ن+1}}\right]^{2} = 1 + \frac{2}{2ن+1} + \frac{1}{(2ن+1)^{2}}$ وبملاحظة أن $\lambda = 1$، $\mu = 2$، عندئذ فإن المتسلسلة متقاربة.

بالنسبة لـ ٤- نلاحظ أن حد راب بالشكل:



$$ر_ن = ن.\left(\frac{أ_ن}{أ_ن+1} - 1\right) = ن\left[\left(\frac{ن!\,هـ^{ن}}{ن^{ن+3}} \times \frac{(ن+1)^{ن+4}}{(ن+1)!\,هـ^{ن+1}}\right)\right] = \left[\left[\left(\frac{ن+1}{ن}\right)^{ن+3} . \frac{1}{هـ}\right] - 1\right] \geq 1$$

بالنسبة لـ ٥- نستخدم معيار كوشي التكاملي وذلك بوضع ق(س) =

$$\frac{1}{س(لوس)^2} \Longleftarrow I = \int_2^{\infty} \frac{دس}{س(لوس)^2} = \left[\frac{-1}{لوس}\right]_2^{\infty} = \lim_{ن\to\infty} \frac{-1}{(لوس)} + \frac{1}{لو ٢} = ٠ + \frac{1}{لو ٢} \Longleftarrow$$

التكامل موجود ⟸ المتسلسلة متقاربة.

معايير تقارب المتسلسلات المتناوبة:

تعريف: إذا كانت المتسلسلة المعطاة ذات الشكل $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{ن} . أ_ن$ حيث $أ_ن > ٠$ أي موجبة تماماً عندئذ تسمى هذه المتسلسلة متسلسلة متناوبة.

إن أكثر المعايير شهرة من أجل هذه المتسلسلات هو معيار لايبنتيز.

معيار لايبنتيز:

إذا كانت لدينا المتسلسلة المتناوبة $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{ن} . أ_ن$ وكانت $\{أ_ن\}$ متناقصة و $\lim_{ن\to\infty} أ_ن = ٠$ عندئذ فإن المتسلسلة تكون متقاربة.

البرهان: بملاحظة متتالية المجاميع الجزئية نجد أن:

$جـ_ن = (أ - أ_٢) + (أ_٣ - أ_٤) + ... (أ_{ن+1} - أ_ن)$ الآن بكتابة

$جـ_ن = أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + ...+ (- أ_{٢ن-٢} + أ_{ن+1}) = أ_{٢ن}.$

$جـ_ن = أ_١ [(أ_٢ - أ_٣) + (أ_٤ - أ_٥) + ... أ_{٢ن}].$

وبملاحظة أن $أ_{٢ن} - أ_{٢ن+1} \geq ٠$ لأن $\{أ_ن\}$ متناقصاً فرضاً.

عندئذ فإن $ج = \lim_{ن\to\infty} ج_{٢ن}$ لأن $ج_{٢ن} < أ_{١}$.

أي أن $\{ج_{ن}\}$ متقاربة وبملاحظة أن $\lim_{ن\to\infty} ج_{٢ن+١} = \lim_{ن\to\infty} (ج_{٢ن} + أ_{٢ن+١})$.

$= \lim_{ن\to\infty} ج_{٢ن} + \lim_{ن\to\infty} أ_{ن+١}$ لكن $\lim_{ن\to\infty} أ_{٢ن+١} = ٠$ وذلك من الفرض.

وبالتالي فإن $\lim_{ن\to\infty} ج_{٢ن+١} = \lim_{ن\to\infty} ج_{٢ن}$ وحسب المبرهنة -١٠- فإن $ج_{ن}$ متقاربة وبالتالي $\sum^{\infty} (-١)^{ن} . أ_{ن}$ متقاربة. وهو المطلوب.

ملاحظة هامة: إن الشروط الواردة في شرط لاينبيتيز شروط كافية ولازمة للتقارب.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة المتناوبة $\sum_{١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن}}{ن}$

الحل:

بملاحظة أن $٠ < \frac{١}{ن(ن+١)} = \frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١} = أ_{ن} - أ_{ن+١} \Longrightarrow \{أ_{ن}\}$ متناقصة.

ولدينا أيضاً $\lim_{ن\to\infty} \frac{١}{ن} = ٠$ وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة حسب لايبينيز.

المتسلسلات الكيفية:

تعريف: نسمي المتسلسلة $\sum_{١}^{\infty} أ_{ن}$ متسلسلة كيفية إذا كانت إشارة حدودها لا تتبع تناوباً أو انتظاماً.

وسنعرض الآن مفهوماً مهماً للتقارب وهو التقارب بالإطلاق.



تعريف: نقول أن $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$ متقاربة بالإطلاق إذا كانت $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ متقاربة.

مبرهنة: إذا كانت $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ متقاربة فإن $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$ متقاربة.

البرهان: في الواقع بوضع شرط كوشي على المتسلسلة $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ نجد أن

$$\forall \in > ٠ : \exists N(\in) : م، ن > N(\in) \Longrightarrow \left| |جـ_{م}| - |جـ_{ن}| \right| < \in$$

$$\Longrightarrow \left| |أ_{ن}| + |أ_{ن+١}| + \ldots\ldots\ldots\ldots |أ_{م}| \right| < \in$$

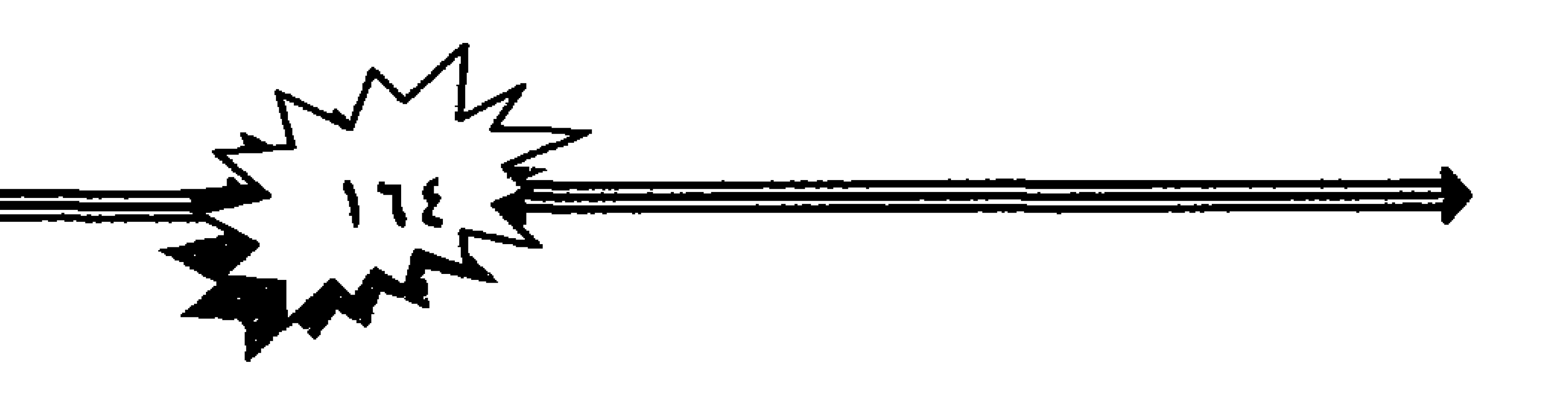
وبملاحظة أن $|أ_{ن+١} + أ_{ن+٢} + \ldots\ldots + أ_{م}| \leq \left| |أ_{ن+١}| + |أ_{ن}| + ٢ \ldots\ldots\ldots + |أ_{م}| \right|$

ومن خواص القيمة المطلقة $\Longleftarrow |أ_{ن+١} - أ_{ن+٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots أ_{م}| < \in$

وعندها فإن شرط كوشي محقق من أجل المتسلسلة $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$ وبالتالي فهذه المتسلسلة متقاربة.

ملاحظة هامة: في الواقع من مفهوم التقارب بالإطلاق نحصل على طريقة لدراسة تقارب المتسلسلات الكيفية وذلك بدراسة متسلسلة القيم المطلقة $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ كمتسلسلة موجبة فإذا كانت الأخيرة متقاربة. أمكننا الجزم بأن المتسلسلة $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$ متقاربة أما إذا كانت $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ متباعدة فإن هذا لن يفيدنا في دراسة تقارب المتسلسلات $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$.

ومما سبق يمكننا إعادة جميع معايير تقارب المتسلسلات الموجبة من أجل $\sum_{ن}^{\infty} |أ_{ن}|$ حيث $\sum_{ن}^{\infty} أ_{ن}$ متسللة كيفية.



مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الكيفية $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}^{2}}$

الحل: بملاحظة أنه من أجل $\sum\limits_{1}^{\infty} \left|\frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}^{2}}\right|$ نجد أن $\left|\frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}^{2}}\right| \leq \frac{1}{\text{ن}^{2}}$.

من هنا وحسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- فإن:

المتسلسلة $\left|\frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}^{2}}\right|$ مقرونة بمتسلسلة $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \frac{1}{\text{ن}^{2}}$ متقاربة وبالتالي فهي متقاربة.

$\Longleftarrow \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}^{2}}$ متقاربة بالإطلاق.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جا}\left(\frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}}\right)\pi,}{3^{2}}$

الحل: بملاحظة أن $\left|\frac{\text{جا}\left(\frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}}\right)\pi.}{3^{2}}\right| \leq \frac{1}{3^{\text{ن}}}$ ولدينا $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{3^{\text{ن}}}$ متقاربة لأنها

هندسية أساسها ر$=\frac{1}{3} < 1$ وبالتالي حسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- فإن

المتسلسلة $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جا}\left(\frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}}\right)\pi.}{3^{2}}$ متقاربة بالإطلاق.

مبرهنة هامة: إذا كان لدينا $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}$ و $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}$ متسلسلتان كيفيتان وكانت $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}^{2}$ و $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}^{2}$ متقاربتان عندئذ تكون المتسلسلات التالية متقاربة أيضاً.

1- $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} |\text{ا}_{\text{ن}} . \text{ب}_{\text{ن}}|$

2- $\sum\limits_{\text{ب}}^{\infty} \left(|\text{ا}_{\text{ن}}| + |\text{ب}_{\text{ن}}|\right)^{2}$

٣- $\sum \frac{|أ_ن|}{ن}$

البرهان:

١- من أجل المتسلسلة $\sum |أ_ن \, . \, ب_ن|$ سنلاحظ العلاقة التالية:

$$٠ \leq \left(|أ_ن| - |ب_ن|\right)^٢ = |أ_ن|^٢ + |ب_ن|^٢ - ٢ |أ_ن| \, . \, |ب_ن|$$

$$\Longleftarrow ٢ \, . \, |أ_ن| \, . \, |ب_ن| \leq أ_ن^٢ + ب_ن^٢$$

وبملاحظة أن الحد الأيمن هو مجموع المتسلستان متقاربتان فالمتسلسلة

$$\sum أ_ن^٢ + ب_ن^٢$$

$\Longleftarrow$ المتسلسلة $\sum |أ_ن| \, . \, |ب_ن|$ قرونة حسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- بمتسلسلة متقاربة $\Longleftarrow \sum |أ_ن| \, . \, |ب_ن|$ متقاربة.

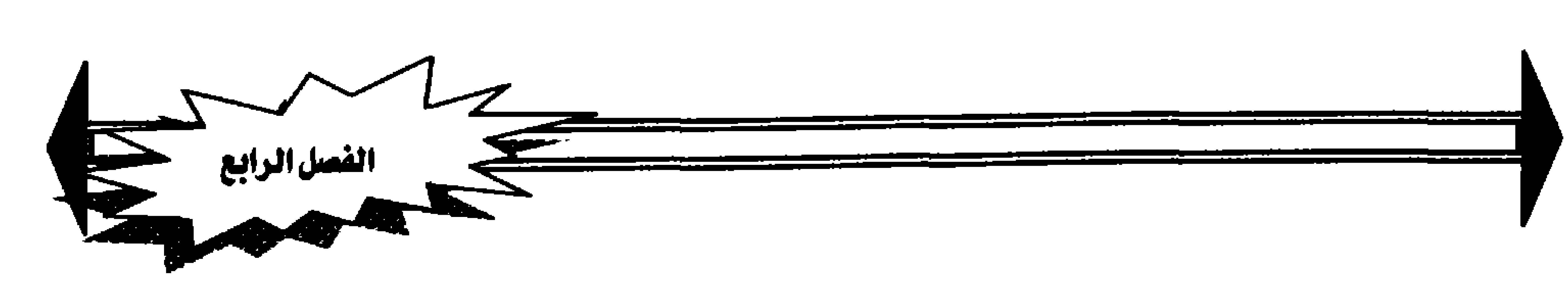
٢- من أجل المتسلسلة $\sum \left(|أ_ن| + |ب_ن|\right)^٢$ بملاحظة أن:

$$٠ \leq \left(|أ_ن| + |ب_ن|\right)^٢ = |أ_ن|^٢ + |ب_ن|^٢ + ٢ |أ_ن| \, . \, |ب_ن| \leq ٢ \, . \, (أ_ن^٢ + ب_ن^٢).$$

وبالتالي المتسلسلة لدينا مقرونة حسب معيار المقارنة الأول بالمتسلسلة المتقاربة

$$٢ \, . \, \sum أ_ن^٢ + ب_ن^٢ \Longleftarrow \sum \left(|أ_ن| + |ب_ن|\right)^٢ \text{ متقاربة.}$$

٣- من أجل المتسلسلة $\sum \frac{|أ_ن|}{ن}$ سنلاحظ أنه إذا اخترنا $ب_ن = \frac{١}{ن^٢}$ فإن



$\sum$ ب$_{ن}^{2}$ = $\sum \frac{1}{ن^{2}}$ متسلسلة متقاربة وبتطبيق القسم الأول من المبرهنة فإن

$\sum \frac{|أ_{ن}|}{ن}$ = $\sum$ |أ$_{ن}$| . |ب$_{ن}$| متقاربة. وتمت المبرهنة.

تكملة للمبرهنة السابقة: في الواقع يمكن القول أنه إذا كانت $\sum$ب$_{ن}^{2}$، $\sum$أ$_{ن}^{2}$ متقاربتان فإن المتسلسلات التالية: $\sum$ أ$_{ن}$. ب$_{ن}$ و $\sum$ (أ$_{ن}$ + ب$_{ن}$)^{2} و $\sum \frac{|أ_{ن}|}{ن}$ متقاربة بالإطلاق وذلك لأن متسلسلات القيم المطلقة الخاصة بها متقاربة.

سنورد الآن أهم معايير التقارب الخاصة بالمتسلسلات الكيفية:

١- معيار آبل- ديرخليه: إذا كانت لدينا متسلسلة كيفية $\sum$ أ$_{ن}$. ب$_{ن}$ فإنه إذا كان

أ - $\sum$ب$_{ن}$ متقاربة بالإطلاق ب- {أ$_{ن}$} محدودة.

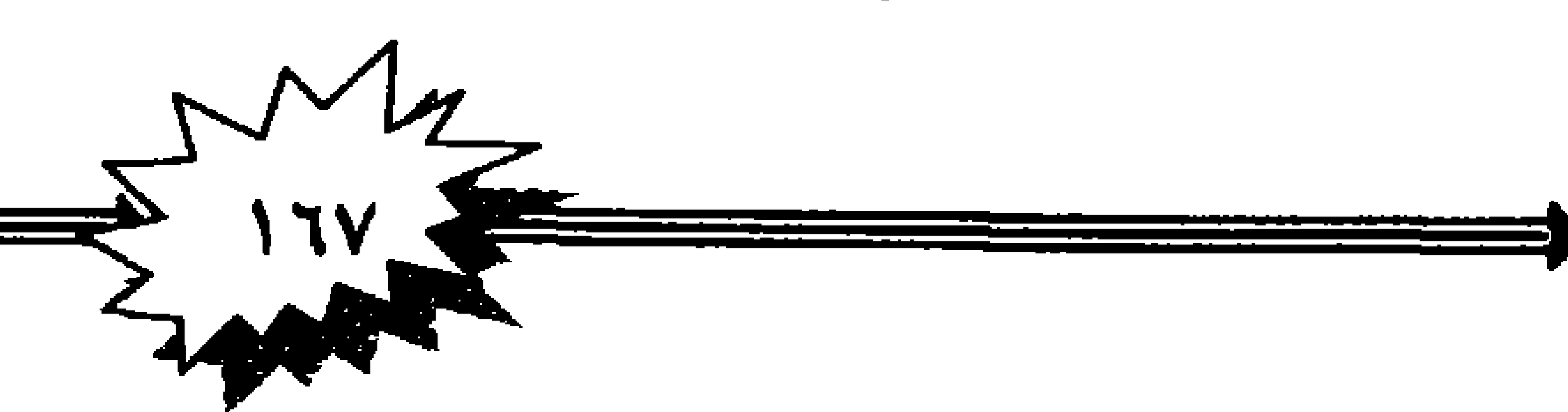
فإن المتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$. ب$_{ن}$ متقاربة بالإطلاق.

البرهان: بملاحظة أنه إذا كانت {أ$_{ن}$} محدودة فإنه بدءاً من حد معين نجد أن |أ$_{ن}$| $\leq$ م* وبملاحظة أن المتسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ متقاربة بالإطلاق.

فإن $\sum$ |ب$_{ن}$| متقاربة $\Leftarrow \left|\sum_{ن+1}^{ن'} |ب_{ك}|\right| < \frac{\in}{م^{*}}$ حسب شرط كوشي للتقارب

وبكتابة المقدار $\left|\sum_{ن+1}^{ن'} |أ_{ك} , ب_{ك}|\right| \leq$ م*. $\left|\sum_{ن+1}^{ن'} |ب_{ك}|\right| \leq$ م*. $\frac{\in}{م^{*}} = \in$

$\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum$ |أ$_{ن}$.ب$_{ن}$| متقاربة $\Leftarrow \sum$ أ$_{ن}$. ب$_{ن}$ متقاربة بالإطلاق.





ملاحظة: إن الشروط الواردة في شروط المعيار هي شروط كافية وغير لازمة للتقارب.

نتيجة هامة: في الواقع إذا كانت $\sum |أ_ن|$ متقاربة عندئذ فإن $\sum^{\infty} أ_ن^2$ متقاربة وذلك وفقاً لمعيار آبل- دير خليه والبرهان يتم بوضع $أ_ن = أ_ن$ و $ب_ن = أ_ن$

وملاحظة أن $\sum |أ_ن|$ متقاربة فرضاً و $\{أ_ن\}$ محدودة كـون $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = 0$ حسب مبرهنة الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة $\sum |أ_ن|$ وبالتالي فإن:

$\sum^{\infty} أ_ن - أ_ن$ متقاربة والأمر أصبح محققاً وبذلك نستطيع الآن كتابة المبرهنة -١٤- وفق الصيغة التالية:

إذا كانت كلاً من المتسلسلتان الكيفيتان $\sum^{\infty} أ_ن$ و $\sum^{\infty} ب_ن$ متقاربتان بالإطلاق فإن كلاً من المتسلسلات التالية متقاربة.

١- $\sum^{\infty} أ_ن . ب_ن$ ٢- $\sum^{\infty} (أ_ن + ب_ن)^2$ ٣- $\sum^{\infty} \frac{أ_ن}{ن}$

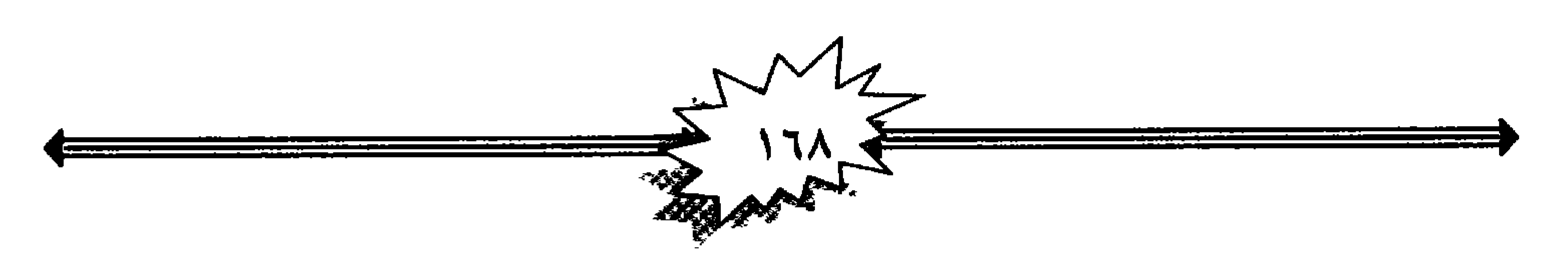
نتيجة هامة: إذا كانت $\sum^{\infty} أ_ن$ متقاربة بالإطلاق فإن المتسلسلة $\sum^{\infty} أ_ن^ر$ حيث $ر \in ص^+$ متقاربة بالإطلاق.

معيار آبل: إذا كان لدينا $\sum^{\infty} أ_ن . ب_ن$ متسلسلة كيفية فإنه إذا كان:

١- $\sum_{1}^{ن} ب_ن = \sigma_ن$ متقاربة.

٢- $\{أ_ن\}$ محدودة.

٣- $\{أ_ن\}$ متناقصة عندئذ تكون المتسلسلة $\sum^{\infty} أ_ن . ب_ن$.



معيار ديرخليه:

إذا كان لدينا $\sum^{\infty}$ أن . بن متسلسلة كيفية عندئذ فإنه إذا كان

١- $\sum_{1}^{ن}$ بن ذات مجاميع جزئية محدودة.

٢- {أن} متناقصة و $\lim_{ن \to \infty}$ أن = ٠ فإن المتسلسلة $\sum^{\infty}$ أن . بن تكون متقاربة.

البرهان: بملاحظة أن $\left|\sum_{1}^{ن} ب_ن\right| \leq$ م محدودة من أجل $N(\in) <$ ن ولدينا من الشرط

$|أ_ن| \leq$ ل-٢ وبكتابة تحويل آبل.

$$\sum_{ك=}^{ن} أ_ك . ب_ك = \sum_{1}^{م-1} (أ_ك - أ_{ك+1}) ب_ك + أ_ن . ب_ن - أ_ن . ب_{ن-1}$$

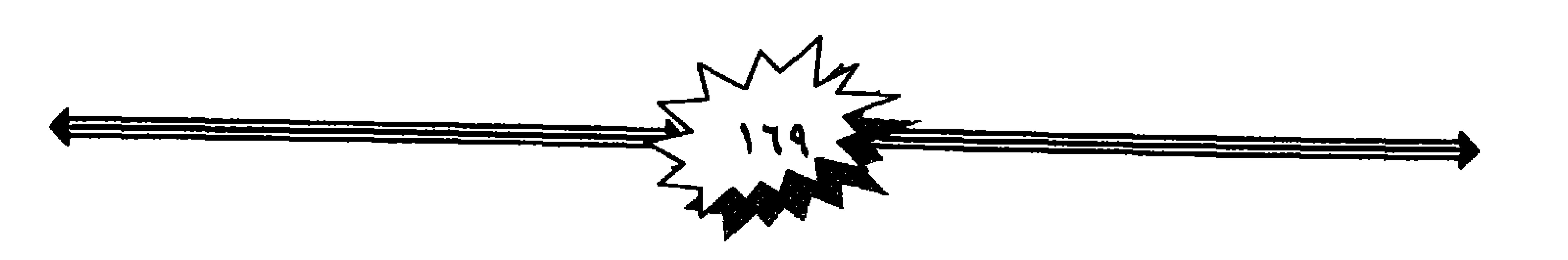
ولدينا $\left|\sum_{ك=ن}^{ن+و} أ_ك . ب_ن\right| \leq$ ل . $\left(\left|أ_{ن+و}\right| - \left|أ_ن\right|\right) \leq$ ل . $\frac{\in}{ل} = \in$

$\Longleftarrow$ المتسلسلة $\sum^{\infty}$ أن . بن متقاربة وفق شرط كوشي.

ملاحظات هامة:

١- إن معيار آبل ينتج من معيار ديرخليه وذلك بملاحظة أن كل متتالية متقاربة محدودة.

٢- إن معيار لايبنيز يعتبر حالة خاصة من معيار ديرخليه حيث إذا وضعنا بن = $(-1)^{ن}$ في معيار ديرخليه نحصل على معيار لايبتيز.



مثال هام:

برهن أنه إذا كانت $\{أ_ن\}$ متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر فإن كلاً من المتسلسلتين التاليتين تكون متقاربة.

$\sum_{1}^{\infty} أ_ن \text{ جتا}(ن\, س)$ ، $\sum_{1}^{\infty} أ_ن \,.\, \text{جا}\,(ن\, س)$.

الحل: من أجل المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} أ_ن \,.\, \text{جا}(ن\, س)$ إن شروط معيار ديرخليه محققة عليها ما عدا الشرط الأول وهو $\sum_{1}^{ن} \text{جا}(ن\, س)$ محدودة.

الآن لنثبت ذلك:

لدينا $\left|\sum_{1}^{ن} [\text{جا}(ن\, س)]\right| = \left|\text{جاس} + \text{جا}٢\text{س} + \ldots\ldots \text{جان س}\right|$

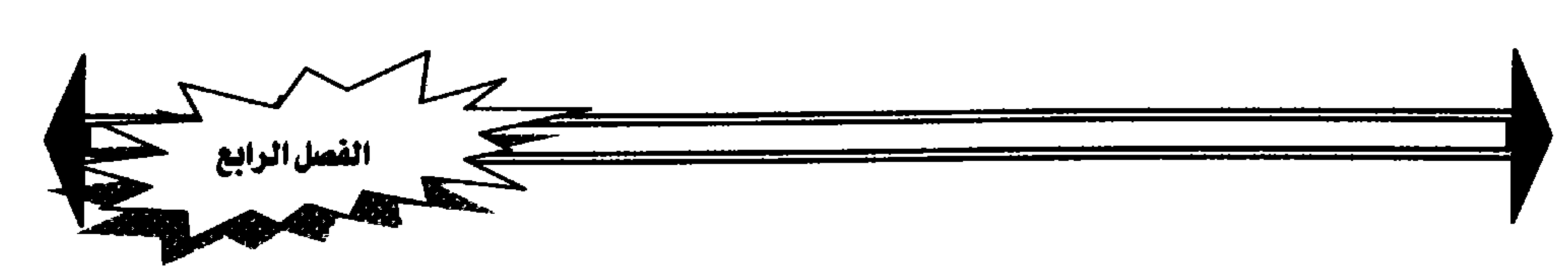
الآن سنضرب المقدار ونقسم على $\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right)$ لنجد أن

$$= \left| \frac{\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right).\text{جا}(س) + \text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right).\text{جا}(٢س) + \ldots\ldots + \text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right).\text{جا}(ن\,س)}{\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right)} \right|$$

وبملاحظة أن $\text{جا}\,\alpha \,.\, \text{جا}\,\beta = \frac{١}{٢}[\text{جتا}(\alpha - \beta) - \text{جتا}(\alpha + \beta)]$

$$\left|\sum_{1}^{ن} \text{جا}(ن\,س)\right| =$$

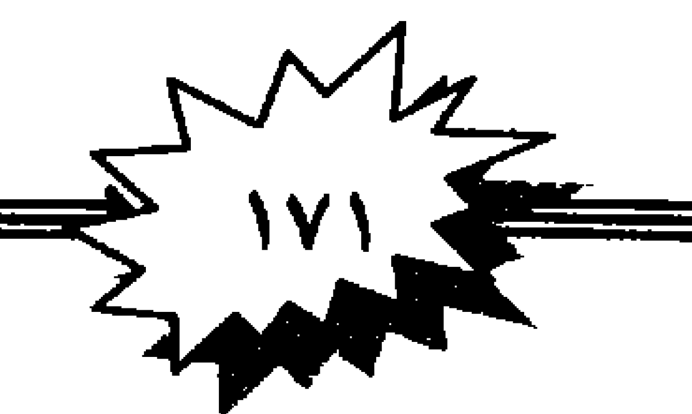
$$\left| \frac{\frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{س}{٢}\right) - \text{جتا}\left(\frac{٣س}{٢}\right)\right) + \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{٣س}{٢}\right) - \text{جتا}\left(\frac{٥س}{٢}\right)\right) + \ldots\ldots \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{٢ن-١}{٢}\right)س - \text{جتا}\left(\frac{٢ن+١}{٢}\right)س\right)}{\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right)} \right|$$



$$= \left| \frac{\frac{1}{2}\left[\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} - \text{جتا}\frac{2\text{ن}+1}{2}.\text{س}\right]}{\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{2}\right)} \right| \leq \frac{2}{2\left|\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\right|} \leq \text{م}$$

وبالتالي تحقق شروط ديرخليه الأول والثاني من أجل $\sum^{\infty}$ أن جا(ن س) وبالتالي فهي متقاربة.

الآن بالنسبة للمتسلسلة $\sum^{\infty}$ أن جتان س يبرهن على تقاربها بنفس الطريقة السابقة.



تمارين عامة

تمارين المتتاليات العددية:

أ- بين كلاً مما يلي- إذا كانت المتتالية متزايدة أم لا.

١- $أ_ن = \frac{١}{ن}$ ٢- $أ_ن = \frac{٢^ن}{ن!}$

٣- $أ_ن = \frac{ن^٢+١}{ن+١}$ ٤- $أ_ن = \frac{(-١)^ن}{ن}$

٥- $\frac{٥ن+٣}{٣ن+٢} = أ_ن$

ب- بيّن في كلاً من المتتاليات التالية إذا كانت محدودة من الأعلى أو الأدنى:

١- $أ_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$ ٢- $أ_ن = \frac{ن+١}{ن^٢+٢}$ ٣- $أ_ن = \frac{\sqrt{ن}+١}{\sqrt{ن}-١}$

٤- $أ_ن = \frac{\sqrt{ن^٢+١}+٣}{\sqrt{ن}+٢}$

جـ- بيّن في كلاً مما يلي إذا كانت المتتالية متقاربة وأوجد نهايتها إن أمكن.

١- $أ_ن = \sqrt{٣+\sqrt{٣+\sqrt{٣}+.....+\sqrt{٣}}}$ حيث أن $أ_ن = \sqrt{٣}$

$أ_{ن+١} = \sqrt{٣+أ_ن}$

٢- $أ_ن = \sqrt[ن]{ن}$ ٣- $أ_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$ ٤- $أ_ن = \frac{ن}{٢^ن}$

د- أوجد النهاية العليا والدنيا إن أمكن لكل من المتتاليات التالية:

١- $ا_ن = جا ن$

٢- $ا_ن = \frac{(-1)^ن \times جا ن}{ن}$

٣- $ا_ن = \frac{(-1)^ن + 1}{2}$

٤- $ا_ن = \frac{(-1)^ن}{2} + \frac{3 \times (-1)^{ن+1}}{2}$

٥- $ا_ن = \frac{1}{\sqrt{ن(ن+1)}}$

هـ- بيّن في كلاً مما يلي إذا كانت المتتالية كوشية أم لا:

١- $ا_ن = هـ^{-ن}$

٢- $ا_ن = \frac{ن}{2^ن}$

٣- $ا_ن = \frac{ن+1}{ن+2}$

٤- $ا_ن = ن + \frac{2}{ن}$

و- برهن اعتماداً على معايير تقارب المتسلسلات العددية كما يلي:

١- $\lim_{ن \to \infty} \frac{جتا ن}{ن^2} = 0$

٢- $\lim_{ن \to \infty} \frac{(-1)^ن}{ن} = 0$

٣- $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{\sqrt[ن]{لو ن}} = 0$

٤- $\lim_{ن \to \infty} \frac{ن+1}{ن+2} = 1$

٥- $\lim_{ن \to \infty} \frac{(ن!)^2}{(2ن)!}$



تمارين المتسلسلات العددية

أ- برهن بثلاث طرق مختلفة تباعد كلاً من المتسلسلات التالية:

١- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن+١}{ن+٢}$ ٢- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{١}{ن}$ ٣- $\sum_{٠}^{\infty} (-١)^{ن}$ جتان

٤- $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{ن}}$ ٥- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن!}{(٢ن+١)!}$

ب- باستخدام معيار دالامبير ومعيار كوشي - الجذر النوني ادرس تقارب كلاً من المتسلسلات العددية التالية:

١- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن!}{٢^{ن}}$ ٢- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن+١}{ن^{٢}+١}$ ٣- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{١}{٣^{ن}+١}$

٤- $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن^{ن}+٢}$ ٥- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن^{٥}}{ن!}$ ٦- $\sum_{١}^{\infty} \frac{هـ^{ن}}{ن}$

ج- باستخدام معيار راب وغاوس بيّن تباعد وتقارب المتسلسلات التالية:

١- $\sum_{٠}^{\infty} \left[\frac{(٢ن+١)!!}{(٢ن)!!}\right]^{ر}$ ٢- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{٢^{ن} ن!}{ن^{٢}}$

٣- $\sum_{١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ ٤- $\sum_{٠}^{\infty} \frac{ن^{٢}}{ن^{٤}+١}$.



نظرية الزمر

الفصل الخامس

نظرية الزمر

اهـتم الرياضـيون القـدامى بدراسـة متعـدد الحـدود (Polynomial) وفي كيفية إيجاد جذوره، إذا كان معروفاً ومنذ زمن البابليين بأن جذور متعدد الحدود مـن الدرجـة الثانيـة $\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$ يمكـن حـسابها بالدسـتور

$$\text{س} = \frac{١}{٢}\left[-\text{ب} \mp \frac{١}{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{جـ}}} \right]$$

وفي عام ١٥١٥ تمكـن كـل مـن فـيرو (Scipio del Ferro) وتاركـاً كليـاً (Tartaglia) كل على انفراد من التوصل إلى دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الثالثة حيث أن متعدد الحدود

$$\text{س}^{٢} + \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

يمكن تحويله إلى

$$\text{ص}^{٣} + \text{ف}\,\text{ص} + \text{ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

عندما نعـوض $\text{س} = \text{ص} - \frac{\text{أ}}{٣}$ هـذا يعـني أن α تكـون جـذراً إلى متعـدد الحدود (٢) إذا وفقط إذا كان $\alpha - \frac{\text{أ}}{٣}$ جذراً إلى متعدد (١).

تحسب α من الدستور

$$\alpha = \left[\frac{-\text{ر}}{٢} + \left(\frac{\text{ر}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ف}^{٣}}{٢٧} \right)^{\frac{١}{٢}} \right]^{\frac{١}{٣}} + \left[\frac{-\text{ر}}{٢} - \left(\frac{\text{ر}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ف}^{٣}}{٢٧} \right)^{\frac{١}{٢}} \right]^{\frac{١}{٣}}$$



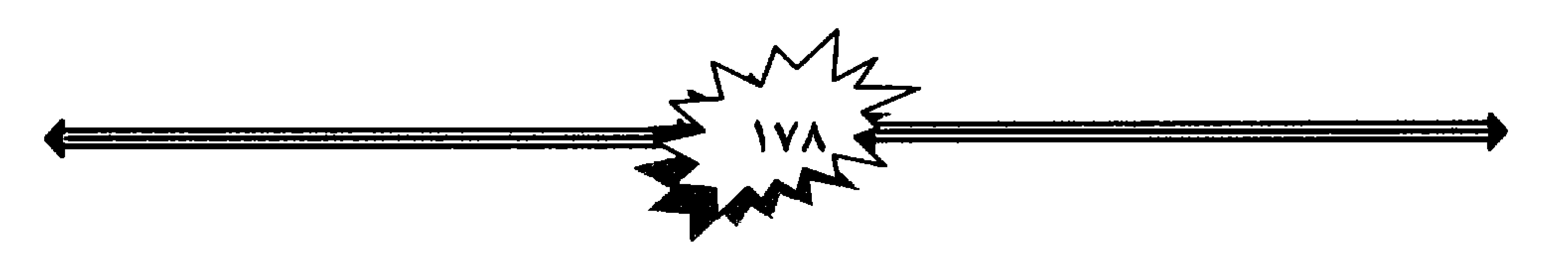
ويتم اختبار الجذور التكعيبية بحيث يكون حاصل ضربها مساوياً إلى $\left(\frac{-ف}{٣}\right)$ وفي سنة ١٥٤٥ توصل (فيراري) (L. Ferrari) إلى دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الرابعة وفي سنة ١٦٣٧ قدم ديكارت (Descarte) اشتقاقاً رائعاً لهذا الدستور. بعد ذلك استمر الرياضيون لما يقارب ثلاثة قرون في البحث عن دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الخامسة أو أكثر إلى أن تمكن رافيني (Ruffini) في سنة ١٧٩٩ ومن بعده أبيل (Abel) في ١٨٢٧ من البرهنة على عدم وجود مثل هذا الدستور.

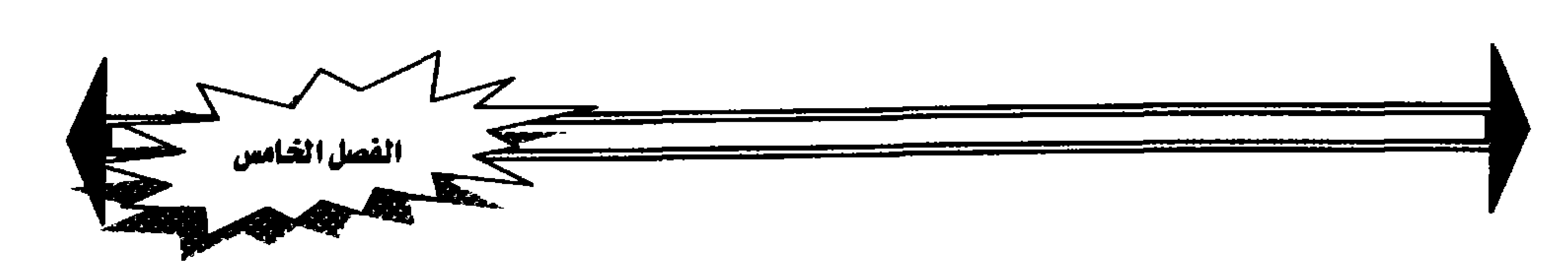
بعد بضعة سنين أخرى تمكن الرياضي العظيم (غالوا) (evarisle Galoie) الذي عاش في الفترة (١٨١١ – ١٨٣٢) من تباين أسباب عدم وجود مثل هذا الدستور وذلك من خلال الصلة الموجودة بين زمر التباديل (permutation group) ومتعدد الحدود.

من هنا بدأت دراسة نظرية الزمر التي شكلت فيما بعد خطاً علمياً تجاوز الحدود التي فكر بها غالوا وأصبحت أداة مهمة في مختلف العلوم ولقد كان من أبرز نتائج هذه الدراسة، تصنيف جميع الزمر المنتهية والذي كان نتيجة جهود أكثر من ١٠٠ رياضي قدموا أكثر من ٥٠٠ بحث ما بين (١٩٤٠ – ١٩٨٠) استوعبت أكثر من ١٥٠٠٠ صفحة شكلت بمجموعها دراسة متكاملة في تصنيف الزمر البسيطة.

(١-٢) مقدمة في نظرية الزمر:

(١-١-٢) تعريف: إذا كانت ز مجموعة غير خالية فإن كل دالة من ز × ز إلى ز تدعى عملية ثنائية على ز.





(٢-١-٢) تعريف:

إذا كانت ز مجموعة غير خالية و * عملية ثنائية على ز فإن (ز ، *) يسمى نصف زمرة (Semigroup) إذا كان أ * (ب * جـ) = (أ * ب) * جـ لكل العناصر أ، ب، جـ المنتمية إلى ز.

مثال١: مجموعة الأعداد الطبيعية مع عملية الجمع أو الضرب الاعتيادية تكون نصف زمرة.

(٢-١-٣): تعريف: الزمرة.

نصف الزمرة (ز، *) تسمى زمرة إذا تحققت كل الشروط التالية:

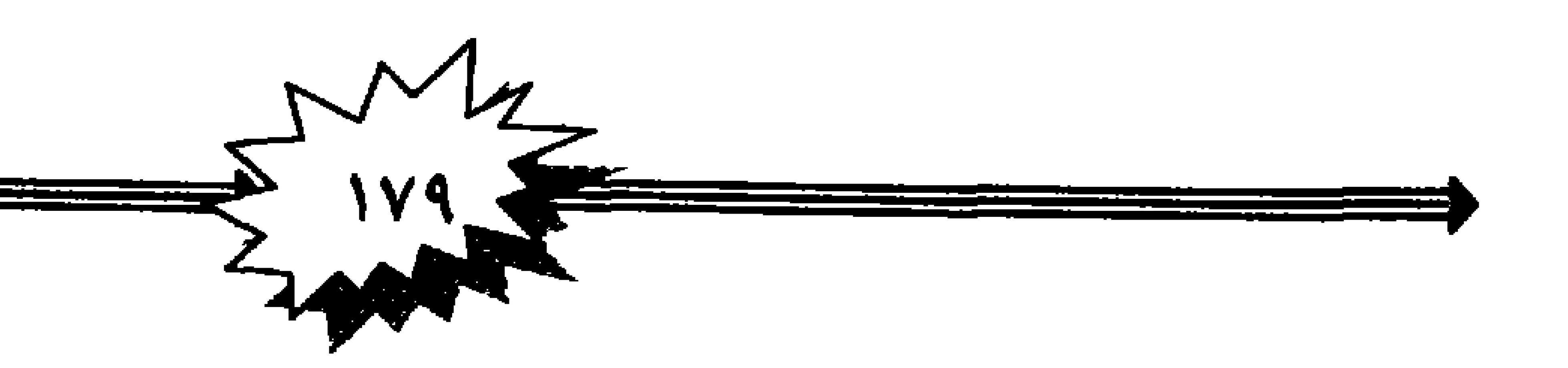
أ) يوجد عنصر هـ ∈ أ بحيث أن أ = هـ * أ = أ * هـ لكل العناصر هـ ∈ ز.

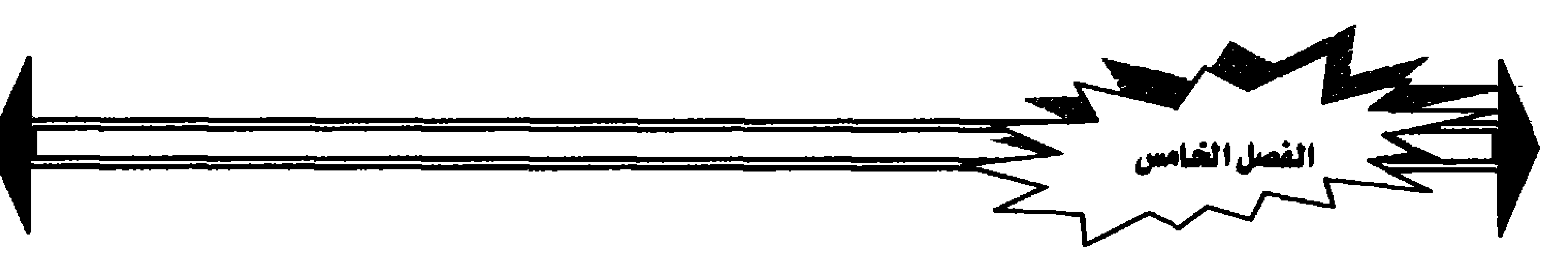
ب) لكل عنصر أ ∈ ز يوجد عنصر نظير $أ^{-1}$ ∈ ز بحيث أن هـ = أ * $أ^{-1}$ = $أ^{-1}$ * أ. العنصر هـ في الزمرة أعلاه يسمى عنصراً محايداً بالنسبة للعملية *.

مثال٢: تكون مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع الاعتيادية زمرة عنصرها المحايد هو الصفر بينما نظير أ هو العنصر −أ.

لا تكون الأعداد الطبيعية مع عملية الجمع الاعتيادية أو عملية الضرب الاعتيادية زمرة. لماذا؟

مثال٣: لتكن ز = {١، −١، i، −i } حيث أن $i = \sqrt{-1}$ ولتكن . عملية الضرب الاعتيادية المعرفة على الأعداد العقدية (ز، ∘) زمرة عنصرها المحايد هو ١ ونظير العنصر i هو −i بينما نظير العنصر −١ هو −١.





من خلال استخدام مواصفات الزمرة بالإمكان البرهنة على تحقق قانون الحذف بالنسبة للزمر وكما يلي:

لتكن ا، ب، جـ ∈ ز، إذا كان ا * ب = ا * جـ فيوجد عنصر $ا^{-1}$ ∈ ز فإن

$ا^{-1}$ * ا * ب = $ا^{-1}$ * ا * جـ ⟵ i * ب = i * جـ ⟵ ب = جـ

وباستخدام خاصية التجميع والعنصر المحايد والنظير للزمر نبرهن أيضاً ا * ب = جـ * ب ⟵ ا = جـ وللطالب أن يبرهن وحدانية العنصر المحايد i والعنصر النظير $ا^{-1}$ في الزمرة.

(٤-١-٢) مبرهنة:

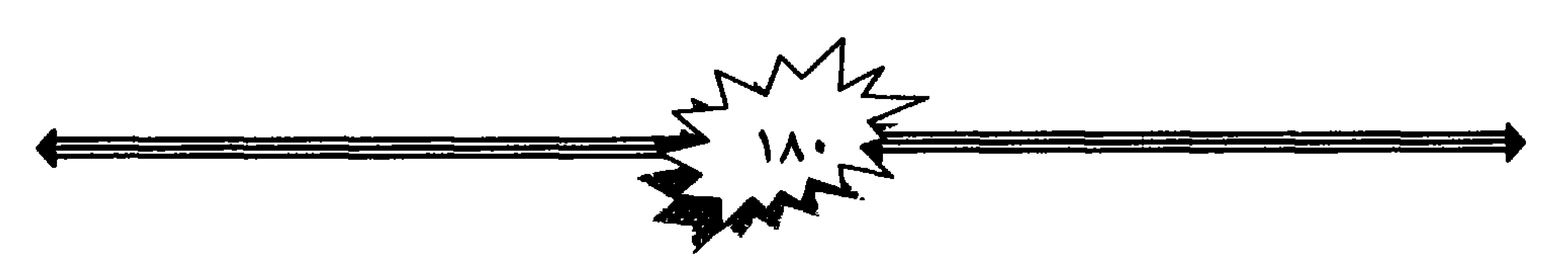
إذا كانت (ز، *) زمرة وكان كل من ا، ب عنصراً في ز فإن $(ا، ب)^{-1}$ = $ب^{-1}$ * $ا^{-1}$ وكذلك ا = $(ا^{-1})^{-1}$.

البرهان: $ا^{-1}$ نظير ا كما أنه نظير $(ا^{-1})^{-1}$ إذا $ا^{-1}$ * ا = هـ = $(ا^{-1})$ * $(ا^{-1})^{-1}$ ا ⟵=$(ا^{-1})^{-1}$. (حسب خاصية الحذف).

كذلك (ا * ب) * $ب^{-1}$ * $ا^{-1}$ = ا * (ب * $ب^{-1}$) * $ا^{-1}$ = ا *هـ * $ا^{-1}$ = ا * $ا^{-1}$ = هـ.

بما أن $(ا*ب)^{-1}$ نظير (ا*ب) وأن العنصر المحايد وحيد فإن (ا*ب) * $(ا*ب)^{-1}$ = (ا*ب) * $ب^{-1}$ * $ا^{-1}$ وباستخدام خاصية الحذف نحصل على $(ا*ب)^{-1}$ = $ب^{-1}$ * $ا^{-1}$.

بالإمكان تعميم هذه الخاصية لأكثر من عنصرين لتكون $(ا_١ * ا_٢ * .... * ا_ن)^{-1}$ =



$أ_{ن}^{-1} * أ_{ن-1}^{-1} * .... * أ_{2}^{-1} * أ_{1}^{-1}$ حيث أن $أ_{1}$، $أ_{2}$،............ $أ_{ن}$ تكون عناصر في الزمرة ز.

(٥-١-٢): تعريف: تسمى الزمرة (ز، *) زمرة منتهية إذا كانت ز مجموعة منتهية وتسمى الزمرة (ز، *) غير منتهية إذا كانت ز مجموعة غير منتهية.

ويرمز العدد العناصر الموجودة في ز بالرمز | ز | وتسمى رتبة ز، والزمرة في المثال الثاني غير منتهية بينما في المثال الثالث الزمرة منتهية ورتبتها ٤ أي | ز | = ٤.

(٦-١-٢) تعريف: تسمى الزمرة (هـ، *) زمرة جزئية في الزمرة (ز، *) إذا كانت هـ $\subseteq$ ز يعبر عن ذلك بالرمز هـ $\leq$ ز عندما تكون (هـ، *) زمرة جزئية في الزمرة (ز، *) ولكن هـ $\neq$ ز فإننا نكتب هـ $\lneq$ ز، واضح أن ز $\leq$ ز وكذلك I = { i } $\leq$ ز.

يسمى كل من الزمرتين (ز، *) و (I، *) زمرة جزئية تافهة في الزمرة ز.

(٧-١-٢) تعريف: إذا كانت (هـ، *) زمرة جزئية في الزمرة (ز، *) فإن (هـ، *) تسمى زمرة جزئية عظمى في (ز، *) (Maximal subgroup) إذا لم يكن هناك زمرة جزئية (ك، *) في (ز، *) بحيث أن هـ $\lneq$ ك $\lneq$ ز وهذا يعني أنه إذا كانت (هـ، *) زمرة جزئية عظمى في الزمرة (ز، *) فإن أية زمرة جزئية (ك، *) في (ز، *) تحقق ما يلي: هـ $\leq$ ك $\leq$ ز $\longrightarrow$ (ك = هـ) $\vee$ (ك = ز)

مثال (٤): إذا كانت ز = { ١، -١، i، -i } و "٠" عملية الضرب الاعتيادية فإن (ز، ٠) زمرة كما أن (هـ، ٠) زمرة جزئية في (ز، ٠) حيث أن



هـ = { ١، -١} وفي الواقع أن (هـ، ٠) زمرة جزئية عظمى في (ز، ٠).

مثال (٥): إذا كانت ز= { ٠، ١، ٢، ٣، ٤} و⊕ عملية ثنائية معرفة على ز كما يلي:

أ + ب = (أ+ب) (o mod) لكل العناصر أ، ب ∈ ز فإن (ز، ⊕) زمرة عنصرها المحايد هو الصفر بينما نظير العنصر ١ هو ٤ ونظير العنصر ٢ هو ٣. هذه الزمرة لا تحتوي أية زمرة جزئية غير تافهة وللطالب أن يتحقق من ذلك.

(٨-١-٢) تعريف: الزمرة الأيبلية: تسمى الزمرة (ز، ✱) زمرة أيبلية (Abeliahn Group) إذا تحقق الشرط أ✱ب = ب✱أ لكل العناصر أ ، ب ∈ ز.

من الواضح أنه إذا عرفنا أن $أ^{ن}$ = أ✱أ✱أ✱.....✱أ ن من المرات. حيث ن عدد صحيح موجب فإن $أ^{ن}$ ✱ $ب^{ن}$ = $(أ ✱ ب)^{ن}$ إذا وفقط إذا أ ✱ ب = ب ✱ أ وتسمى هذه الخاصية أي أ✱ب = ب✱أ خاصية الإبدال وهي ليست بالضرورة متحققة في جميع الزمر.

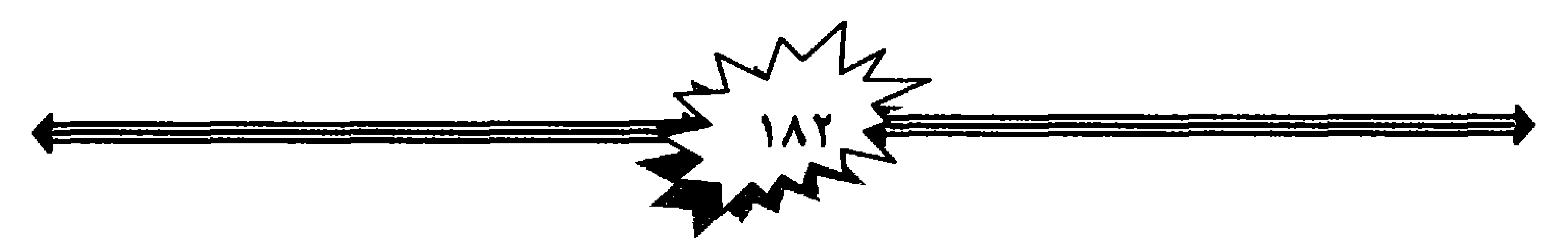
مثال: لتكن ز = { أ، ب، جـ، د، هـ، و} حيث أن:

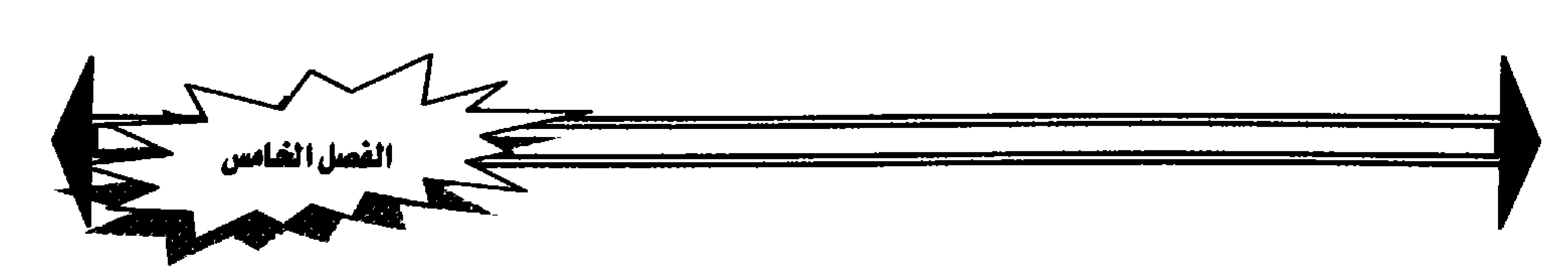
$$أ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$جـ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad د = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هـ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و= $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ولتكن " ٠ " عملية الضرب الاعتيادية على المصفوفات.





فإن (ز، ٠) تكون زمرة للطالب أن يتحقق من ذلك.

هـذه الزمـرة ليست أبلية لكون د . ب = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ = هـ

بينما ب . د = $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = و

فإن (ز، ٠) تكون زمرة وللطالب أن يتحقق من ذلك. وهذه الزمرة ليست أبلية لكون

جـ . أ = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ = د

بينما أ . جـ = $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = هـ

ملاحظة: وللاختصار سنكتب من الآن فصاعداً الزمـرة ز بـدلاً مـن (ز ، ٭) كما سنكتب أب بدلاً من أ٭ب إلا إذا كانت هناك ضرورة لكتابتها مع العملية ٭.

(٩-١-٢): تعريف: إذا كانت هـ مجموعة جزئية في الزمرة ز فإن أصغر زمرة جزئية في ز (من حيث الرتبة) تحتوي على هـ. تمثل بالرمز <هـ> وتسمى الزمرة الجزئية في المتولدة بالمجموعة الجزئية هـ، كما نقول أن عناصر هـ تولد الزمرة الجزئية <هـ>.

في المثال أعلاه إذا أخذنا هـ = { أ، جـ} فإن <هـ> = < جـ ، أ> = ز لكون $جـ^{2} = I$ جـأ = د أجـ = هـ أجـأ = هـ أ = ب أي أن الزمرة ز يمكن توليدها من العناصر جـ أ.



(٢-١-١٠): تعريف: الزمرة الدائرية (Cyclic Group):

تسمى الزمرة ز زمرة دائرية إذا وجد عنصر مثل ؏ في ز بحيث أن <؏> = ز إذا كانت ن= |<؏>| فإننا نرمز للزمرة الدائرية بالرمز $C_م$ حيث أن <؏> = $C_ن$.

فالزمرة في المثال (٣)، زمرة دائرية لكون $C_٤$ = <i> = ز حيث أن $i^٢$ = − ١ $i^٣$ = −١ $i^٤$=١

(٢-١-١١) تعريف: رتبة العنصر ؏ في الزمرة ز هي رتبة الزمرة الدائرية <؏>.

(٢-١-١٢) مبرهنة إذا كانت ز زمرة فإن $؏^٢$ = ؏ ⟵ ؏ = i حيث أن i هو العنصر المحايد في ز و ؏ أي عنصر في ز.

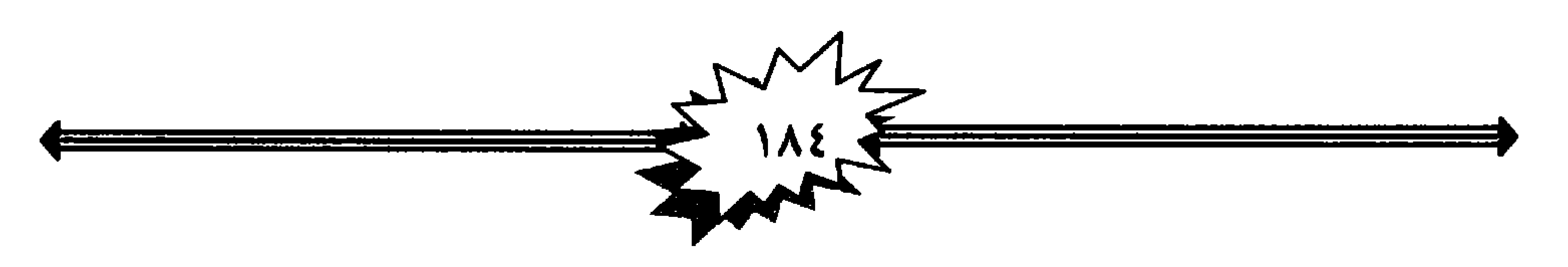
البرهان: بما أن ب زمرة إذاً يوجد عنصر $؏^{-١}$ ∈ ز إذاً $؏^٢$ = ؏ ⟵ ؏ ؏ = ؏ ⟵ $؏^{-١}$ ؏ ؏ = $؏^{-١}$ ؏ ⟵ i ؏ = i ⟵ ؏ = i.

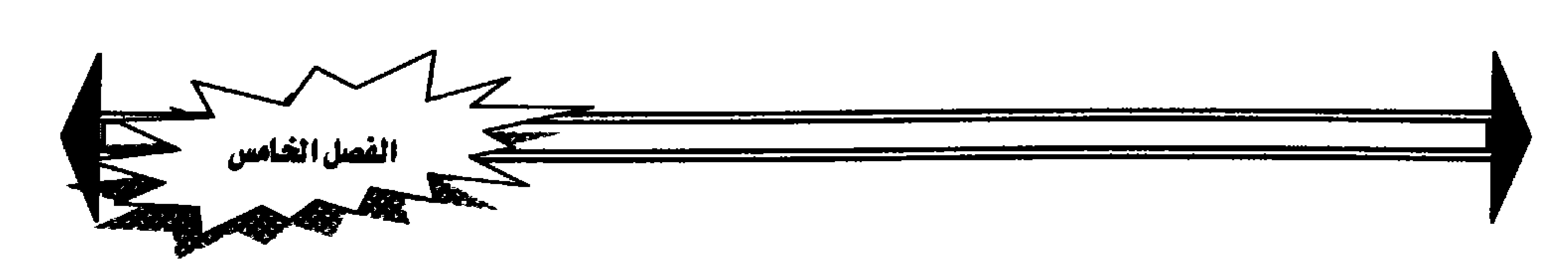
تعريف (٢-١-١٣): إذا كانت (ز، ✱) و (هـ ، ∘) زمرتين فإن التشاكل الزمري (أو التشاكل) هو الدالة ف: ز ⟵ هـ بحيث أن

ف (؏ ✱ ب) = ف(؏) ∘ ف (ب) لكل العناصر ؏، ب ∈ ز.

إذا كانت دالة التشاكل متباينة (١-١) وشاملة (onto) فإن التشاكل يسمى تشاكلاً تقابلياً، والزمرتان ز، هـ تكونان متشاكلتين تقابلياً إذا وجد تشاكل تقابلي.

ف : ز ⟵ هـ ويعبر عن هذه العلاقة بالرمز ز ≃ هـ.





(١٤-١-٢) تعريف: إذا كان كل من م، ۞ مجموعة جزئية غير خالية في الزمرة ز فإن

م ۞ = { ٱ ب : ٱ ∈ ۞، ب ∈ م } في حالة م = { ب } فإننا نكتب ب ۞ =

{ ٱ ب : ٱ ∈ ۞ } في حالة كون ۞ زمرة جزئية في ز فإن ب ۞ تسمى مجموعة مشاركة بمعنى (Right Coset) إلى ۞ في ز بينما ۞ ب تسمى مجموعة مشاركة يسرى إلى ۞ في ز.

يسمى العنصر ب ممثل المجموعة المشاركة ب ۞ ومن الواضح أن ب۞ لها أكثر من ممثل. إذ أن أي عنصر بٱ عندما ٱ ∈ ۞ يمكن أن يكون ممثلاً لها وذلك لأنه عندما تكون ۞ زمرة فإن ۞ = ۞ ٱ = ٱ۞ لكل العناصر ٱ ∈ ۞.

مثال ٧: نعرف أن جـ = { ١، -١} زمرة جزئية في الزمرة ز = { ١، -١، i، -i }.

المجموعات المشاركة اليمنى إلى جـ هي:

جـ١ = { ١، -١} = جـ جـ (-١) = { -١، ١} = جـ١.

جـi = { i، -i } ≠ جـ جـ (-i) = { -i، i } = جـi ≠ جـ وواضح أن

جـ١ ∩ جـi = Φ

(١٥-١-٢) مبرهنة تمهيدية: إذا كانت جـ زمرة جزئية في الزمرة ز، وكانت ٱ، ب ∈ ز فإن جـ ٱ = جـ ب إذا وفقط إذا ٱ$^{-1}$ب ∈ جـ.

البرهان: نفرض جـ ٱ = جـ ب بما أنه إذا كان ١ هو العنصر المحايد إلى جـ فإن





$ء = ١ ء \in$ جـء = جـ ب لذا يوجد عنصر ع $\in$ جـ بحيث أن ء = ع ب وهذا ينتج

ء $ب^{-١}$= ع وبما أن ع $\in$ جـ فإن ء $ب^{-١}$ $\in$ جـ.

الآن نفرض أن ء $ب^{-١}$ $\in$ جـ فينتج جـ ء$ب^{-١}$ = جـ ⟵ جـ ء = جـ ب $\neq$ ٠

(١٦-١-٢) مبرهنة: لتكن جـ زمرة جزئية في ز، إذا كانت جــ ب، جــء مجموعتين مشاركتين في ز حيث أن ء، ب $\in$ ز فإنه إما أن تكون جـء = جــ ب أو جـء $\cap$ جـ ب = Φ

البرهان: نفرض أن جـء$\cap$جـ ب $\neq \Phi$، فعلينا أن نبرهن جــء = جــ ب ليكن س$\in$ جـ $\cap$ ءجـ ب إذاً (س $\in$ جـء) Λ (س $\in$ جـ ب).

وهذا يعني أن هناك ر، ع في جـ بحيث أن (س = جــء) Λ (س = ر ب) لـذا ع ء = ر ب ⟵ ء$ب^{-١}$ = $ع^{-١}$ ر $\in$ جــ وحسب (١٥-١-٢) ينتج جـء = جـ ب.

المبرهنة أعلاه تبين أن الزمرة الجزئية جـ يمكن أن تعرف علاقة تكافؤ في ز وهذه العلاقة تكون كالآتي:

إذا كانت ء، ب $\in$ ز فإن ء يكافئ ب إذا كان ء$ب^{-١}$ $\in$ جـ للطالب أن يبرهن ذلك.

(١٧-١-٢) تعريف: إذا كانت جــ زمرة جزئية في الزمرة ز فإن عدد المجموعات النملي (أو اليسرى) في ز يسمى دليل جـ في ز ويرمز له بالرمز [ز : جـ].



(١٨-١-٢) مبرهنة: إذا كانت جـ زمرة جزئية في ز فإن عدد المجموعات المشاركة اليمنى في ز يساوي عدد المجموعات المشاركة اليسرى في ز.

البرهان: إذا كانت ي مجموعة المجموعات المشاركة اليمنى في ز وكانت س مجموع المجموعات المشاركة اليسرى في ز فإن الدالة ى : ي ⟵ س بحيث أن ى : جـ أ ⟵ أ$^{-1}$جـ متباينة وشاملة وتترك برهان ذلك لطالب.

(١٩-١-٢) مرهنة: إذا كانت ك، هـ زمرتين جزئيتين في ز فإن هـ ك زمرة جزئية في ز إذا وفقط إذا هـ ك = ك هـ.

البرهان:

نفرض أن هـ ك = ك هـ ليكن س، ص ∈ هـ ك، إذا توجد عناصر هـ$_{1}$، هـ$_{2}$ ∋ هـ وك$_{1}$، ك$_{2}$ ∋ ك بحيث أن ص= هـ$_{2}$ ك$_{2}$ س = هـ$_{1}$ ك$_{1}$ لذا يكون س ص = هـ$_{1}$ك$_{1}$هـ$_{2}$ك$_{2}$ بما أن ك$_{1}$هـ$_{2}$∈ك هـ = هـ ك لذا يوجد عنصران ك$_{3}$∋ ك، هـ$_{3}$ ∋ هـ بحيث أن ك$_{1}$هـ$_{2}$ = هـ$_{3}$ ك$_{3}$ لذا

س ص = (هـ$_{1}$هـ$_{3}$) (ك$_{3}$ك$_{2}$) ∈ هـ ك

إن قانون التجميع يتحقق فوراً لكون عناصر ك وهـ هي عناصر في ز كذلك س$^{-1}$ = (هـ$_{1}$ك$_{1}$)$^{-1}$ = ك$_{1}$$^{-1}$ هـ$_{1}$$^{-1}$ ∈ ك هـ = هـ ك وأخيراً فإن س س$^{-1}$ ∋ هـ ك ⟵ ١ ∋ هـ ك

الآن نفرض أن هـ ك زمرة.

لتكن س ∋ هـ ك، إذاً س$^{-1}$، هـ ك، هذا يعني أن هناك ك∋ ك، هـ ∋ هـ بحيث أن س$^{-1}$ = هـ ك ولكن س$^{-1}$ = هـ ك ⟵ س = (هـ ك)$^{1=}$ = ك$^{-1}$ ك$^{-1}$ ∋ ك هـ.



إذاً س ∋ ك هـ

نفترض الآن أن س ∋ ك هـ إذاً يوجد عناصر ك∋ ك، هـ ∋ هـ، بحيث أن س= ك هـ وبما أن س= ك هـ⟵س$^{-1}$ = (ك هـ)$^{-1}$ = هـ$^{-1}$ ك$^{-1}$ ∈ هـ ك فإن س$^{-1}$ ∋ هـ ك ولكن هـ ك زمرة إذاً س ∋ هـ ك.

(٢٠-١-٢) مبرهنة تمهيدية:

إذا كانت جـ زمرة جزئية في ز فإن |جـم| = |جـ| حيث أن |جـم| يمثل عدد عناصر المجموعة جـم

البرهان: نعرف الدالة بين جـ، جـم كما يلي جـم ⟵ جـ هذه الدالة متباينة وشاملة ونترك برهانها للطالب.

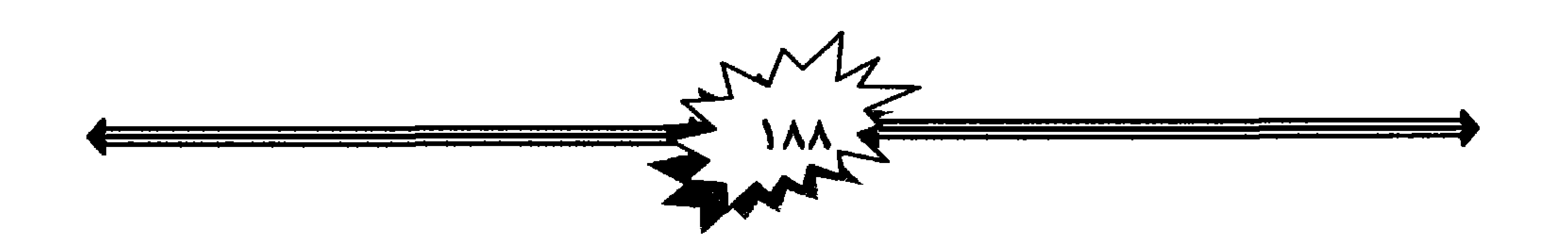
(٢١-١-٢) **مبرهنة لاكرنج: Lagrange Theorem**

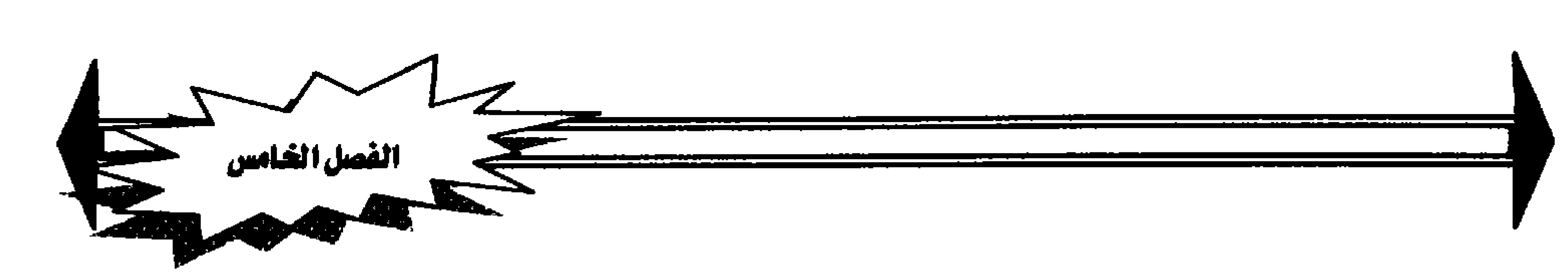
إذا كانت جـ زمرة جزئية في الزمرة المنتهية ز فإن [ز : جـ] = $\frac{|ز|}{|جـ|}$

البرهان: بما أن دليل جـ في ز، [ز : جـ] يمثل عدد المجموعات المشاركة اليمنى (أو اليسرى) في ز وكل من هذه المجموعات تحتوي على | جـ | من العناصر.

إذاً | ز | = | جـ | [ز : جـ] ≠ ٠

(٢٢-١-٢) نتيجة: إن كانت | ز | = و، حيث يمثل و عدداً أولياً فإن ز زمرة دائرية.





البرهان: بما أن رتبة الزمرة الجزئية تقسم رتبة الزمرة ز وبما أن رتبة ز عدد أولي، إذاً تكون الزمر الجزئية في ز هي التافهة فقط أي ز، ﴿ه﴾. اختر $ا \in$ ز بحيث أن $ا \neq ١$ إذاً ز = <ا>.

(٢-١-٢٣) نتيجة: إذا كانت ز زمرة منتهية و $ا \in$ ز فإن | <ا> | / | ز |

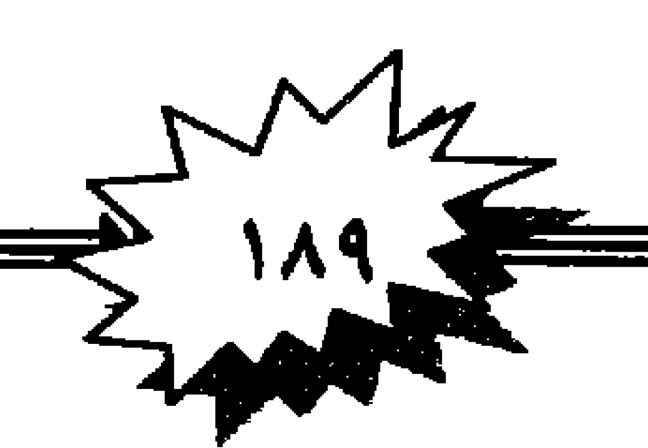
مثال: في المثال ٤ في هذا الفصل حيث تمثل هـ زمرة جزئية في ز نلاحظ أن | ز | = ٤، | هـ | = $\frac{٢}{٤}$. ١ من رتب العناصر $-i$، i، -١، ١ هي على الترتيب ٤، ٤، ١، ٢ لكونها أصغر الأعداد الطبيعية التي تحقق $(١)^٢ = ١$، $(-١)^٢ = ١$ $(i)^٤ = ١$، $(-i)^٤ = ١$

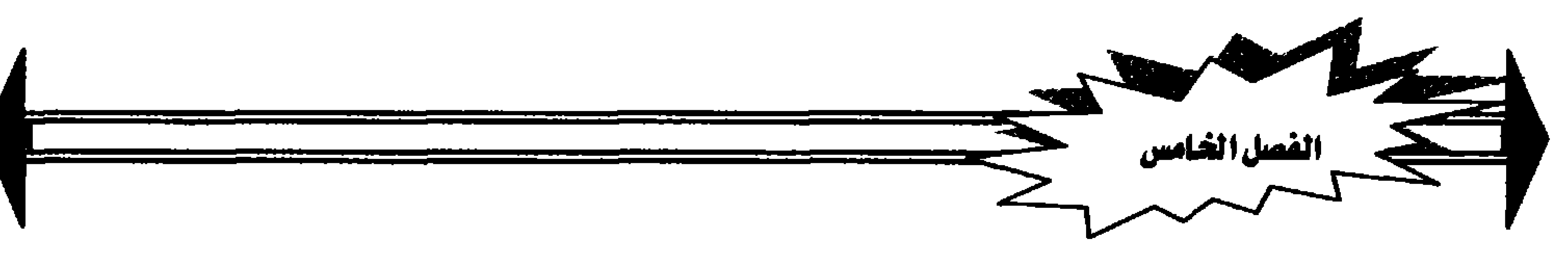
كل من العنصرين i، $-i$ يولد زمرة دائرية رتبتها ٤ والعنصر -١ يولد زمرة دائرية رتبتها ٢.

(٢-١-٢٤) تعريف: الزمرة الجزئية س في الزمرة ز تسمى زمرة جزئية سوية (Normal Subgroup) إذا كان ع ن ع $\in$ س لكل العناصر ع $\in$ ز، ن $\in$ س نعبر عن ذلك بالرمز س $\leq$ ز ويسمى العنصر ع ن ع$^{-١}$ مرافق العنصر ن في ز. إذا كانت ع س ع$^{-١}$ = {ع ن ع$^{-١}$: ن $\in$ س} فإن الزمرة الجزئية السوية يمكن تعريفها كما يلي:

س زمرة جزئية سويّة في ز إذا وفقط إذا ع س ع$^{-١}$ $\geq$ س لكل العناصر ع $\in$ ز.

(٢-١-٢٥) مبرهنة تمهيدية: الزمرة الجزئية س في الزمرة ز تكون سويّة إذا وفقط إذا: س = ع س ع$^{-١}$ لكل العناصر ع $\in$ ز





البرهان: بما أن ع س $ع^{-1}$=س ⟵ ع س $ع^{-1}$ ⊇ س لكل العناصر ع ∈ ز.

فإن س ⊵ ز (حسب التعريف)

الآن نفرض أن س زمرة جزئية سويّة في ز هـذا يعـني أن ع س $ع^{-1}$ ≥ س لكل العناصر ع ∈ ز

بما أن $ع^{-1}$ س ع = $ع^{-1}$ س $(ع^{-1})^{-1}$ ⊇س ⟵ $ع^{-1}$ س ع ⊇ س فإن

س = ع ($ع^{-1}$ س ع) $ع^{-1}$ ⊇ ع س $ع^{-1}$ ⟵ س ⊇ع س $ع^{-1}$ ⟵ س = ع س $ع^{-1}$

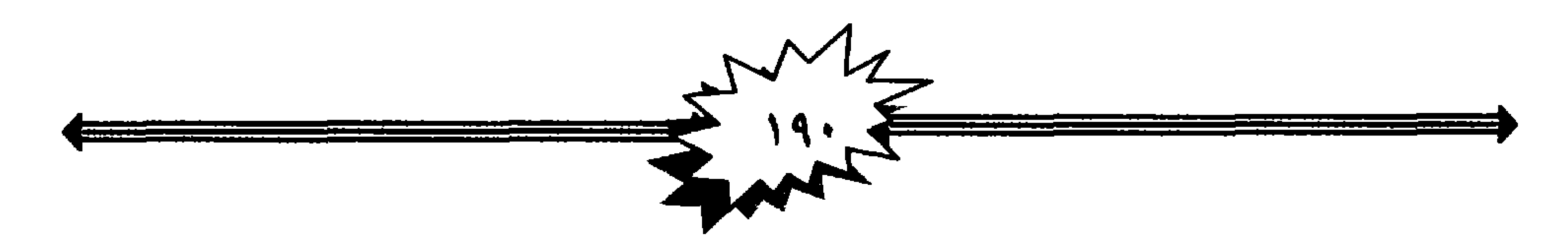
هذه المبرهنة تعني أن مرافق أي عنصر من عناصر الزمرة الجزئية السوية س في ز يكون موجوداً في س أيضاً. أي أن عناصر المجموعة س هي نفس عناصر المجموعة ع س $ع^{-1}$ ولكن هذا يعني أن ع ن $ع^{-1}$ = ن لكل العناصر ن ∈ س، ع ∈ ز

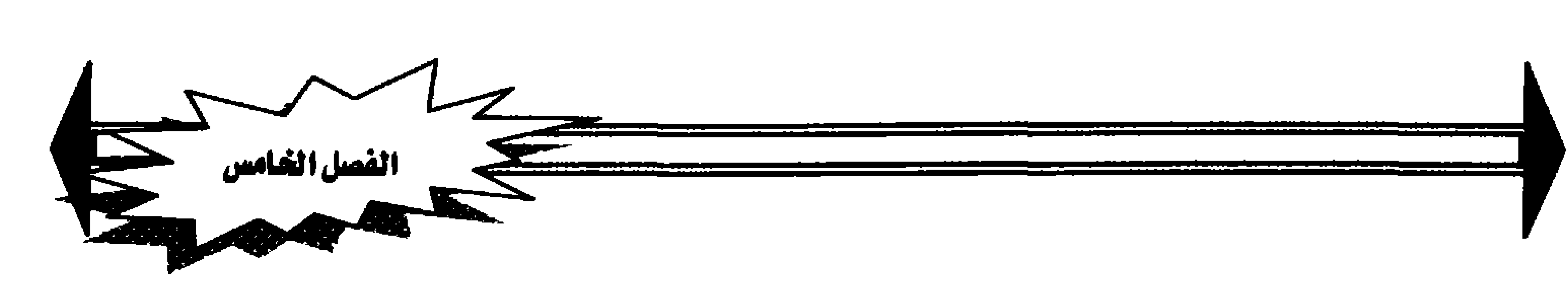
إن العبارة ع س $ع^{-1}$ = س لكل العناصر ع ∈ ز مكافئة للعبارة ع س = س ع لكل العناصر ع ∈ ز

مثال ٩: لتكن ز = { i، أ، ب ، جـ، د، هـ} حيث أن

$$i = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad د = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \quad هـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$





إذا كانت عملية الجمع لعناصر المصفوفات معرفة على النحو الآتي:

١ + ١ = ٠ + ٠ = ٠

١ + ٠ = ٠ + ١ = ١

فإن (ز، X) تكون زمرة حيث أن X تمثل عملية الضرب للمصفوفات رتبة ز هي ٦.

إذا كانت هـ* = [i، د، هـ] فإن هـ* زمرة جزئية سوية في ز، وللطالب أن يتحقق من ذلك.

كذلك نلاحظ أن أد أ$^{-1}$= هـ أهـأ$^{-1}$ = د هذا يعني أن أهـأ$^{-1}$ ≠ أ وكذلك أ < أ$^{-1}$ ≠د ولكن أهـ*أ$^{-1}$=هـ*هـ* ≤ز أو من ناحية أخرى أهـ* = [أ، أد، أهـ] = {أ، ب، جـ} = {أ، هـأ، دأ} = هـ*أ.

(٢٦-١-٢) مبرهنة: الزمرة الجزئية س في الزمرة ز تكون سويّة إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب مجموعتين مشاركتين يمنى إلى س في ز مجموعة مشاركة يمنى إلى س في ز.

البرهان: نفرض أن س زمرة جزئية سويّة في ز، هـذا يعني أن ع س = س ع لكل العناصرع∈ز. اذا

س أ بس= س(أس)ب=س(سأ)ب=سس أب =سأب لكل عناصر ع∈ز.

الان نفرض ان سأسب =سب=سأب لكل عناصر أ.ب∈ز

إذاً س أس أ$^{-1}$ = س(أ أ$^{-1}$) = س$_{١}$ = س ⟵ س(أس أ$^{-1}$) = س

⟵ أس س$^{-1}$ ⊇ س ⟵ س ⊵ ز.





(٢٧-١-٢) تعريف: إذا كانت س زمرة جزئية سويّة في الزمرة ز فإن المجموعة التي عناصرها كل المجموعات المشاركة اليمنى إلى س في ز يرمز لها بالرمز ز/ س.

سنترك للطالب أن يتأكد من كون عملية الضرب المعرفة على ز/ س في المبرهنة السابقة معرفة تعريفاً جيداً.

(٢٨-١-٢) مبرهنة: إذا كانت س زمرة جزئية سوية في الزمرة ز فإن ز/ س تكون زمرة أيضاً حيث أن عملية الضرب معرفة على ز/ س كما في المبرهنة السابقة.

هذه الزمرة تسمى الزمرة الكسرية إلى ز بواسطة س.

البرهان: نفرض أن س ﺃ، س ب، س جـ ∈ ز/ س حيث أن ﺃ، ب، جـ ∈ ز.

ومن الواضح أن (س ﺃس ب) = س ﺃب ∈ ز/ س.

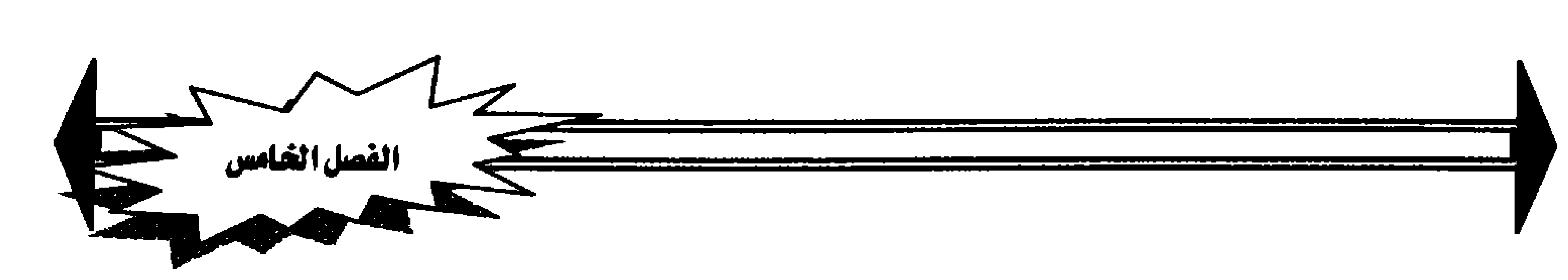
هذا يعني أن ز/ س مغلقة بالنسبة لعملية الضرب، بما أن (س ﺃس ب) س جـ = س ﺃب س جـ = س ﺃب جـ = س ﺃس ب جـ = س ﺃ(س ب س جـ) وهذا يعني أن قانون التجميع يتحقق أيضاً.

بما أن س = س ١ ∈ ز/ س

وأن س س ﺃ= س١س ﺃ= س ﺃ = س ﺃ ١= س ﺃس١= س ﺃس إذاً تكون س عنصراً محايداً ينتمي أن ز/ س.

وأخيراً فإن س ﺃس ﺃ$^{-1}$ = س ﺃ ﺃ$^{-1}$= س١= س= س ﺃ$^{-1}$ ﺃ= س ﺃ$^{-1}$س ﺃ





هذا يعني أن س$ا^{-1}$ نظير س$ا$ وهو موجود في ز/ س إذاً ز/ س زمرة.

ومن الواضح طبعاً أنه عندما تكون ز زمرة منتهية فإن |ز/ س|= [ز:س] أي أن |ز/ س|= $\frac{|ز|}{|س|}$

(٢٩-١-٢) نتيجة: إذا كانت س زمرة جزئية في الزمرة ز وكان [ز:س] =٢ فإن س زمرة جزئية سوية في ز.

البرهان: بما أن [ز:س] = ٢ إذاً توجد مجموعتان مشاركتان يمنى إلى س في ز طبعاً س هي إحدى هاتين المجموعتين.

نفرض أن ا ∈ ز، إذا كان ا ∈ س فإن س ا = س = اس. أما إذا كان ا ∉ س فإن

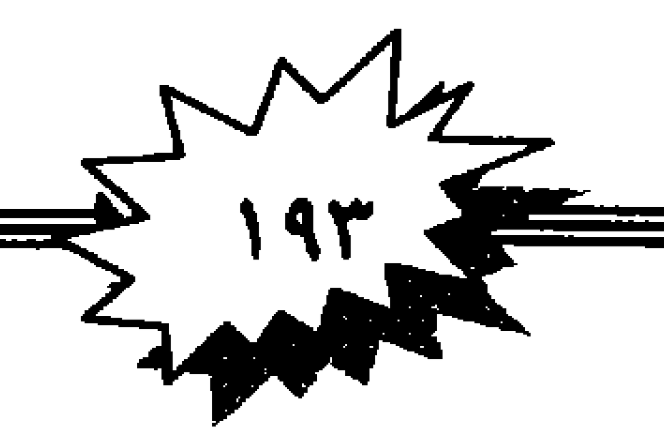
ا ∈(ز- س)⟵((اس ∩ س) = Φ) Λ ((س ا ∩ س) = Φ) بما أنه يوجد في ز اثنتان فقط من المجموعات المشاركة اليمنى إلى س وإحداهما س فإن س ا = اس وهذا يعني أن س ⊴ ز.

(٣٠-١-٢) تعريف: الزمرة البسيطة (Simple Group):

الزمرة ز تسمى زمرة بسيطة إذا كانت الزمر الجزئية السوية في ز هي التافهة فقط، أي لا يوجد زمرة جزئية هـ بحيث I ⊴≠ هـ ⊴≠ ز

(٣١-١-٢) تعريف: المركز:

ليكن ا عنصراً في الزمرة ز فإن مجموعة عناصر ز التي تحقق صفة الإبدال مع ا تسمى بمركز ا في ز ويرمز له بالرمز م$_ز$(ا) أي أن م$_ز$(ا) = {ع ∈ ز: ع ا = اع} وبالإمكان توسيع فكرة المركز لأكثر من عنصر واحد كما يلي:



(٢-١-٣٢) تعريف:

لتكن ف مجموعة جزئية غير خالية في الزمرة ز، مركز ف في ز يرمز له بالرمز مز(ف) وهي مجموعة عناصر ز التي تحقق صفة التبادل مع جميع عناصر ف أي أن

مز(ف) = {ع ∈ ز : ع أ = أع : ∀ أ ∈ ف }

(٢-١-٣٣) تعريف: المسوّي:

لتكن ف مجموعة جزئية غير خالية في ز، مسوّي ف في ز يرمز له سز (ف) وهو مجموعة عناصر ز التي تحقق العلاقة ع ف = ف ع أي أن

سز (ف) = {ع ∈ ز : ع ف = ف ع} ومن الواضح أن مز (ف) ≥ سز (ف)

(٢-١-٣٤) تعريف: مركز الزمرة (Center):

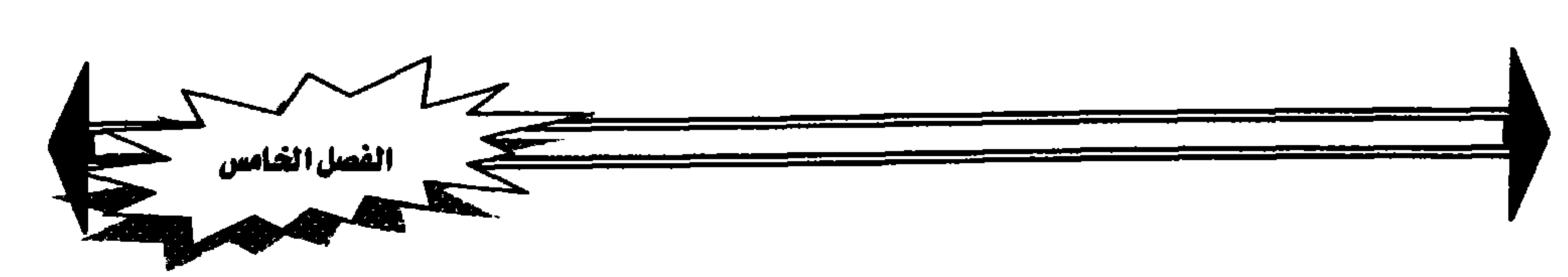
لتكن ز زمرة يرمز لمركز الزمرة ز بالرمز z، وهو مجموعة عناصر ز التي تحقق صفة الإبدال مع جميع عناصر ز أي أن

z = {ع ∈ ز : ع أ = أع : ∀ أ ∈ ز}.

(٢-١-٣٥) تعريف: الجداء المباشر (The Direct Product)

لتكن هـ، ك زمرتين منتهيتين. الجداء المباشر للزمرتين هـ، ك هو

ز = هـ × ك = {(س، ص): س ∈ هـ، ص ∈ ك} إذا عرفنا * على ز بالشكل



(س، ص) * (س$_1$، ص$_1$) = (س * س$_1$ ، ص * ص$_1$)، (س، ص) (س$_1$، ص$_1$) = (س س$_1$، ص ص$_1$) فإن (ز، *) تكون زمرة عنصرها المحايد (١ هـ ١ك) حيث أن ١ك، ١هـ وهما العنصران المحايد للزمرتين هـ، ك على الترتيب.

العنصر النظير للعنصر (س، ص) هو (س، ص)$^{-1}$ = (س$^{-1}$ ، ص$^{-1}$) كما أن قانون التجميع يتحقق لكون كل من هـ ك زمرة.

رتبة ز هي حاصل ضرب رتبة هـ في رتبة ك أي أن | ز | = | هـ × ك | = | هـ | | ك |

بالإمكان تعميم الجداء المباشر لأكثر من زمرتين حيث تكون ز = هـ$_1$ × هـ$_2$ × ....هـ$_ر$ =

{ (س$_1$، س$_2$، ....س$_ر$) : س$_i$ ∈ هـ$_i$ } حيث أن i = ١، ٢، ....ر

كذلك | ز | = | هـ$_1$| |هـ$_2$| ....| هـر|. وتكون في بعض الأحيان الزمرة ز متشاكلة تقابلياً مع الجداء المباشر لزمرتين جزئيتين ك، هـ في ز، نعبر عن ذلك بالرمز ز ≈ هـ × ك هذه الحالة تكون عندما تتوفر الشروط التالية:

أ) صفة الإبدال تحقق بين عناصر هـ وعناصر ك، أي أن س ص= ص س لكل عناصر س∋هـ ولكل عناصر ص ∋ ك.

ب) لكل العناصر س* ∋ز يوجد عنصر س ∋هـ وعنصر ص ∋ك بحيث أن س* = س ص هذا يعني باختصار أن ز = هـ ك.



جـ) العنصر المحايد هو العنصر الوحيد المشترك بين الزمرتين ك، هـ أي ان
هـ∩ك= {١}.

ويمكن اسبتدال الشرطين ب) وجـ) بشرط واحد مكافئ لهما هو أن كل عنصر س*∋ز يمكن تمثيله بشكل وحيد كحاصل ضرب العنصر في هـ وعنصر في ك، أي أنه إذا كان س*∈ز فيوجد عنصر س∈هـ وعنصر ص∈ك بحيث أن س*= س ص وأن هذا التمثيل وحيد.

يمكن التحقق من ذلك التمثيل وبسهولة وكما يلي:

نفرض أن الشرطين ب) وجـ) يتحققان. نفرض أن س* = س ص = $س_١$ص إذاً

$س_١^{-١}$ س = $ص_١$ $ص_١^{-١}$ = ١ وهذا ينتج فوراً

$ص_١$ = ص و $س_١$ = س.

الآن نفرض أن كل عنصر س* في ز هناك عنصر س∋هـ وعنصر ص∋ك بحيث أن

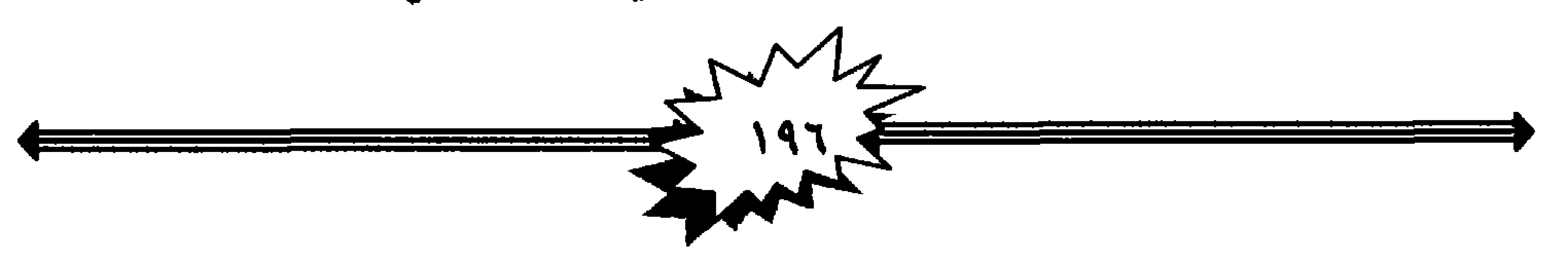
س*= س ص وأن هذا التمثيل وحيد.

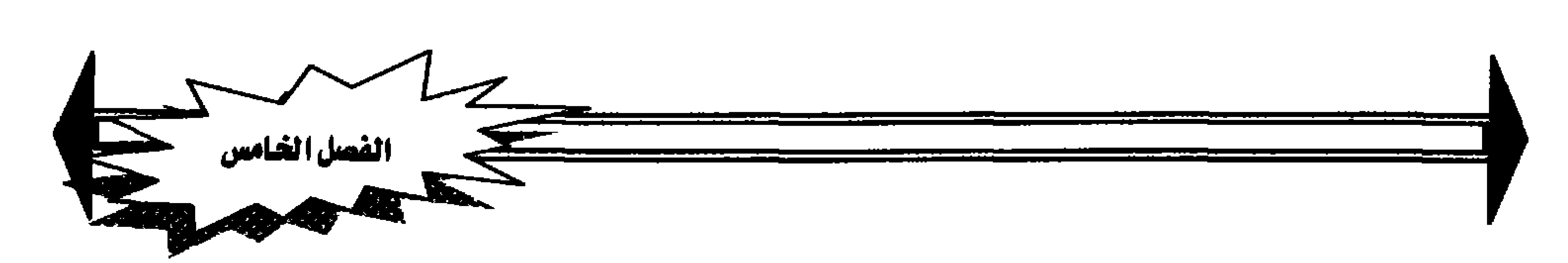
الشرط (ب) متحقق فوراً.

نفرض أن ع∋هـ∩ك فإن ع∋هـ وع∋ك وبالتالي فإن ع= ١ع حيث أن ١ ∋ هـ وع∋ك.

كذلك ١ع=ع حيث أن ١ ∋ك، ع ∋هـ ولكن ع له تمثيل واحد (بالفرض).

إذاً ع=١ واستناداً إلى حالة التكافؤ أعلاه فإن الدالة ω (س*) = ω(س ص) = (س، ص) تحقق شروط التشاكل التقابلي، وهذا يعني أن ز ≈ هـ × ك.





بنفس الطريقة يمكن تعميم الحالة الآنفة الذكر لأكثر من زمرتين بحيث تكون

ز $\simeq$ هـ$_1$×هـ$_2$ × ......هـ$_ر$ حيث أن هـ$_1$، هـ$_2$ ، ......هـ$_ر$ زمر جزئية في ز عندما أ) عناصر كل زمرتين هـ$_ن$، هـ$_ر$، تحقق صفة الإبدال.

ب) لكل العناصر س*$\in$ ز توجد عناصر س$_م$ $\in$ هـ$_م$ بحيث أن س*= س$_1$، س$_2$........س$_ر$

جـ) هـ$_م$ $\cap$ هـ$_1$ هـ$_2$..........هـ$_{م-1}$ هـ$_{م-2}$ ....هـ$_ر$ = {١}

مثال ١٠: لتكن ز = {١، ٢، ٤، ٧، ٨، ١١، ١٣، ١٤} ، × عملية ثنائية معرفة على ز كما يلي: أ$\otimes$ ب = (أ×ب) (mod ١٠) لكل العناصر أ، ب $\in$ ز

وفي ومن الواضح أن ز تكون زمرة، كما أن C_2 = {١، ١١}، C_4 = {١، ٢، ٤، ٨} زمرة جزئية في ز، بما أن ز زمرة أبيلية فإن الشرط أ) يتحقق فوراً.

بما أن C_2 C_4 = {١، ٢، ٤، ٨، ١١، ٧، ١٤، ١٣} = ز إذن يتحقق الشرط ب) أيضاً.

بما أن $C_2 \cap C_4$ ={١} فإن الشرط جـ) يتحقق وبالتالي فإن ز $\simeq C_2 \times C_4$.

(٣٦-١-٢) مبرهنة: إذا كانت ز زمرة منتهية ورتبة كل عنصر فيها ٢. أي أن (س*)^2 = ١ لكل العناصر س*$\in$ز فإن ز تتشاكل تقابلياً مع الزمرة الأبيلية من النمط





$\underbrace{C_2 \times C_2 \times C_2 \times \ldots\ldots C_2}_{\text{م من العوامل}}$ وبـذلك فـإن | ز | = $C^{م}$ حيـث تمثـل م عـدداً طبيعياً.

البرهان: إذا كانت | ز | = ٢ فإن ز = C_2 والمبرهنة صحيحة.

ولكن $س_1^{ل_1}$ $س_2^{ل_2}$ ...... بفرض أن | ز | > ٢ لـتكن ﻫ، ب∈ز عناصـر تختلف عن العنصر المحايد ١ وبالفرض $ﻫ^2$= $ب^2$= ١ وهذا يعني أن ﻫ = $ﻫ^{-1}$، ب = $ب^{-1}$

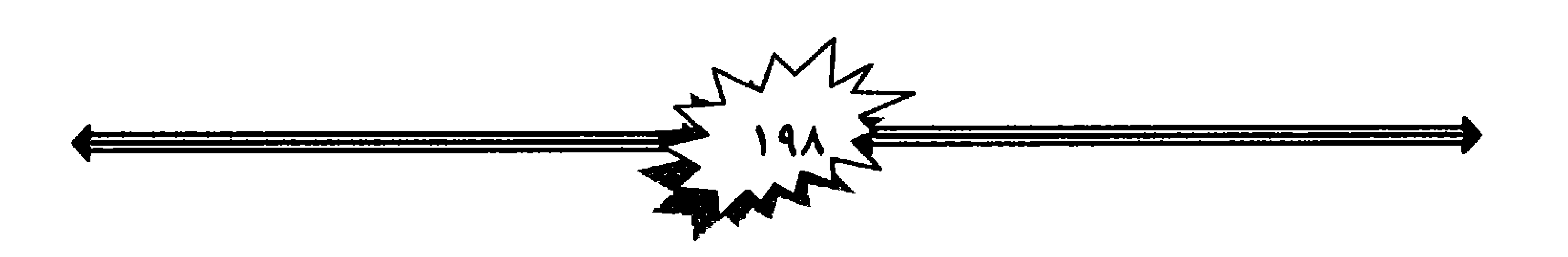
كذلك ﻫ، ب∈ز وهذا ينتج حسب الفـرض أيـضاً. $(ﻫب)^2$ = ١ إذاً ﻫب = $(ﻫب)^{-1}$ = $ب^{-1}$ $ﻫ^{-1}$ = ب ﻫ

وهذا يعني أن ز زمرة أبيلية وبالتـالي فـإن الـشرط أ) يتحقـق فـوراً لـتكن ز = <$س_1$، $س_2$، ...$س_ر$> حيث أن $س_1$، $س_2$،.......$س_ر$ هي العناصر المولـدة للزمرة ز والتي لا يمكن اختزالها إلى عدد أقل. أي لا يمكن كتابة أي من عناصرها بدلالة العناصر الأخرى الباقية.

بما أن ز زمرة أبيلية وأن رتبة كل عنصر فيها ٢، وإذا كانت $س^*$∈ز فإن

$س^*$ = $س_1^{م_1}$ $س_2^{م_2}$ ......$س_ر^{م_ر}$ حيث أن $م_i$ تساوي صفر أو ١ لكل قـيم i= ١، ٢، .....ر نفرض أن هناك تمثيل آخـر إلى $س^*$ أي أن $س^*$= $س_1^{ن_1}$ $س_2^{ن_2}$ ......$س_ر^{ن_ر}$ حيث أن $ن_i$ تساوي صفر أو ١ لكل قيم i = ١، ٢، ....ر.

إذاً $(س^*)^2$ = $س^*س^*$=١ ⟵($س_1^{م_1}$ $س_2^{م_2}$ ......$س_ر^{م_ر}$) ($س_1^{ن_1}$ $س_2^{ن_2}$ ......$س_ر^{ن_ر}$) = ١ ⟵ $س_1^{ل_1}$ $س_2^{ل_2}$ ......$س_ر^{ل_ر}$ = ١ حيـث أن $ل_i$ = $م_i$ + $ن_i$ لكل قيم i= ١، ٢،........ر كما أن $ل_i$ تساوي صفر أو ١.



$س_ر^{ل_ر} = ١ \Longrightarrow س_١^{ل_١} = س_٢^{٢} \, س_٣^{٣} \, ... \, س_ر^{ل_ر}$ وهذا يناقض فرضيتنا في البداية من أن العناصر المولدة إلى ز غير قابلة للاختزال.

إذاً يتحقق الشرطان ب) و جـ).

(٣٧-١-٢) أنماط الزمر ذات الرتبة ٤ وذات الرتبة ٦ :

لحد الآن لا توجد طريقة عملية لإيجاد كل احتمالات الزمر ذات الرتبة المحددة مسبقاً بل لا نعرف حتى عدد هذه الزمر باستثناء بعض الحالات الخاصة. المعلومات النظرية التي لدينا الآن كافية لإيجاد جميع أنماط الزمر ذات الرتب الصغيرة نسبياً مثل ٢، ٣، ....٢٠ أو أكثر أحياناً، باستخدام حسابات بسيطة سنناقش فيما يلي كيفية إيجاد الزمر ذات الرتبة ٤ والزمر ذات الرتبة ٦ كنموذج لبقية الزمر ذات الرتب الصغيرة المذكورة في أعلاه. وبالإمكان استخدام نفس النهج لإيجاد الزمر ذات الرتب الصغيرة الأخرى علماً بأن الأمكان اختزال الكثير من الجهد باستخدام مبرهنات أخرى إضافية لم نتطرق لها لحد الآن.

نفرض أن رتبة الزمرة ز هي ٤ أي أن | ز | = ٤ ليكن أ ∈ز حيث أن أ ≠ ١ بما أن

| <أ> | / | ز |، إذاً رتبة العنصر أ إما أن تكون ٢ أو ٤ وهي رتبة أي عنصر في ز.

إذا كانت ز تحتوي على عنصر رتبته ٤ والتي هي رتبة ز فإن هذا يعني أن ز زمرة دائرية متولدة بهذا العنصر، أ مثلاً وأن عناصر ز هي أ، $أ^{٢}$، $أ^{٣}$، $أ^{٤}$ = ١



أما إذا كانت ز لا تحتوي على عنصر رتبته ٤ فإن هذا يعني أن جميع عناصر ز باستثناء العنصر المحايد طبعاً، ذات الرتبة ٢. وهذا ينتج حسب المبرهن (٣٦-٢) بأن ز $\simeq C_2 \times C_2$ وأن عناصر ز هي ١، ٲ، ب، ٲب = بٲ.

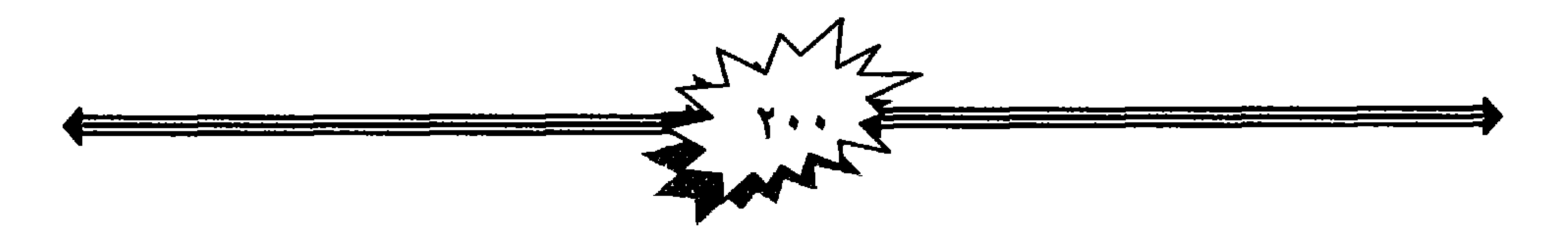
إذاً يوجد نمطان فقط للزمر ذات الرتبة ٤ وهي C_4 أو $C_2 \times C_2$ الآن نناقش الزمر ذات الرتبة ٦. نفرض أن | ز | = ٦، إذاً وجد عنصر في ز رتبته ٦ أي أن هناك ٲ ∈ ز بحيث أن ٲ^6=١ فإن ز = <ٲ> = C_6 ليكون رتبة ز هي ٦ أيضاً.

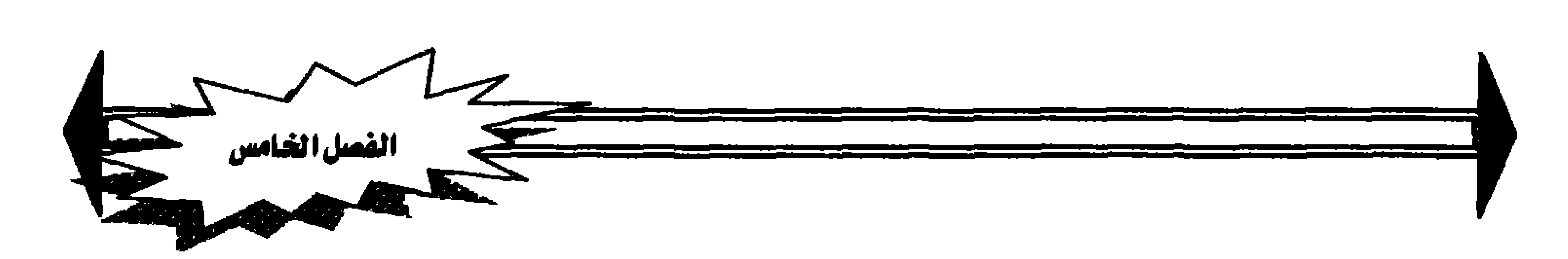
إذا لم يكن هناك عنصر في ز رتبته ٦ فإن احتمالات رتبة أي عنصر مثل ٲ في ز ويختلف عن العنصر المحايد إما أن تكون ٢ أو ٣ لأن | <ٲ> | / | ز | = ٦ لكل العناصر ٲ ∋ز

بما أن | ز | = ٢^ن لأي عدد طبيعي ن. فيوجد في الأقل عنصر واحد ٲ ∋ز ذو رتبة ٣. وهذا يعني أن هناك ٣ عناصر متمايزة في ز هي: ٲ، ٲ^2، ٲ^3 = ١ بما أن رتبة <ٲ> هي ٣ بينما رتبة ز هي ٦. فإن <ٲ> $\subsetneq$ز هذا يعني أن هناك عنصراً آخر و∋ز يختلف عن العناصر الثلاثة الأخرى. لذا ز يحتوي على العناصر الستة الآتية:

١، ٲ، ٲ^2، و، وٲ، وٲ^2 وهي متمايزة أي أن ز = {١، ٲ، ٲ^2، و، وٲ، وٲ^2} (للطالب أن يتحقق من تمايز عناصر ز) لكي تكون المجموعة ز مع العملية الثنائية المعرفة عليها. زمرة يجب أن تكون ز مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية.

نبدأ أولاً بالعنصر و^2 الذي يجب أن يكون أحد العناصر الستة الآنفة الذكر بما أن:





$و^٢ = وم ⟵ و = م \quad و^٢ = وم^٢ ⟵ و = م^٢ و^٢ = و ⟵ و = ١$

فإن هذه الاحتمالات غير واردة لأن و يختلف عن ١، م، $م^٢$.

بقيت هناك ثلاثة احتمالات إلى $و^٢$ وهي إما $م^٢ = و^٢$ أو $م = و^٢$ أو $١ = و^٢$

إذا كان $م^٢ = و^٢$ فإن هذا ينتج $و^٣ = وم^٢$. ولكن $م^٢ \neq ١$، $م^٢ \neq ١$ حيث أن ١، $م^٢$، $وم^٢$ هي من العناصر الستة المتمايزة.

إذا $و^٣ \neq ١$ ، $و^٢ \neq ١$، وهذا يعني أن رتبة ولا تساوي ٢ كما أنها لا تساوي ٣ وهذا يناقض ما كنا قد افترضناه أولاً.

وبنفس الطريقة إذا كان $و^٢ = م$ فإن هذا ينتج $و^٣ = وم$ وبالتالي فإن رتبة و لا تساوي ٢ كما أنها لا تساوي ٣ لنفس السبب في الحالة السابقة. وهذا يناقض ما كنا افترضناه أيضاً إذاً:

والآن نناقش العنصر مو الذي يجب أن يكون أحد العناصر الستة المتمايزة بما أن

$مو = ١ ⟵ م^٣ \quad و = م^٢ ⟵ و = م^٢$

$مو = م ⟵ و = ١$

$م و = م^٢ ⟵ و = م$

$م و = و ⟵ م = ١$

فإن هذه الاحتمالات غير واردة لأن و تختلف عن ١، م، $م^٢$ كما أن م$\neq$١ بقي احتمالان إلى مو هما مو = $وم^٢$ أو مو = وم إذا كان مو = وم فإن:



$(أو)^{٢} = أ^{٢}و^{٢} = أ^{٢} \neq$ وكذلك $(أو)^{٣} = أ^{٣}و^{٣} = و^{٣} = و \neq ١$ هذا يعني أن رتبة أو لا تساوي ٢ ولا تساوي ٣. وهذا يناقض ما كنا قد افترضناه إذاً أو = و$أ^{٢}$ ومنها نستنتج أيضاً أن $(أو)^{٢}$= أو أو = و$أ^{٢}$أو = و$أ^{٣}$و = $و^{٢}$ = ١

والآن لم يبق للعنصر $أ^{٢}$و سوى احتمال واحد هو $أ^{٢}$و = وأ ويمكن التحقق من ذلك بسهولة.

ز= <أ، و> حيث أن $أ^{٣} = و^{٢} = (أو)^{٢} = ١$ لذا فهناك نمطان فقط من الزمر ذات الرتبة ٦ هي $C_٦$ والزمرة = ز = <أ، و> حيث أن $أ^{٣} = و^{٢} = (أو)^{٢} = ١$

(٢-١-٢٨) تعريف: (Dihedral group):

عندما ن ≥ ٣ فإن الزمرة $D_ن$ (Dihedral group) تعرف كالآتي:

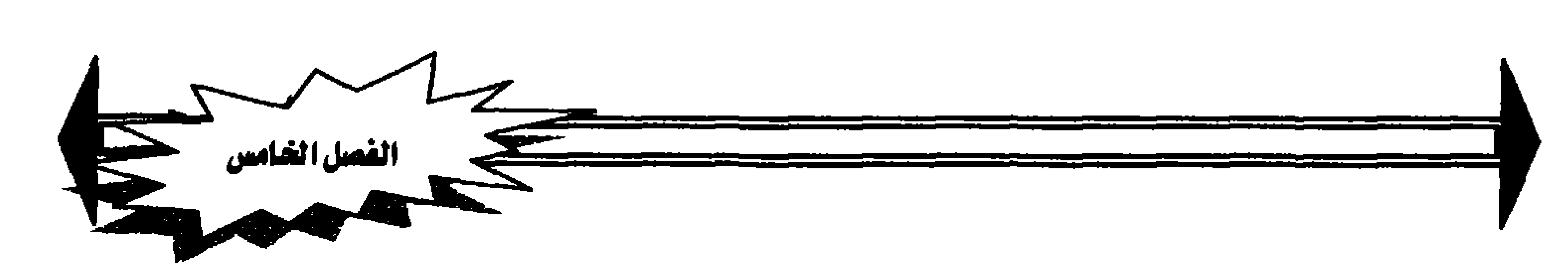
$D_ن$ = <أ، ب> حيث أن $أ^{ن} = ب^{ن} = ١$، ب أ = $أ^{-١}$ب رتبة $D_ن$ هي ٢ن.

مثال ١١: الزمرة ز = <أ، و> حيث أن $أ^{٣} = و^{٢} = (أو)^{٢} = ١$ هي $D_٣$ كما أن $|D_٣| = ٦$

تمارين (٢-١)

١- برهن أن المجموعات التالية تكون زمراً أبيلية غير منتهية نسبة إلى عمليات الضرب الاعتيادية

أ) ز = $\{٢^{ك}$: ك = ٠، ±١، ±٢،..............$\}$.



ب) ز = { جتاθ + i جاθ، θ ∈ن}، حيث أن ن تمثل مجموعة الأعداد النسبية.

٢- لتكن ز زمرة، والعناصر أ، ب، جـ ∈ ز برهن أن

أ) العنصر والعنصر ب أ لهما نفس الرتبة

ب) إذا كان أ= (أب)^{٢} = ب^{٢} = أ^{٢} فإن أب = ب أ.

جـ) إذا كان أ^{مn} =١ وكان (م، ن) = ١ فيوجد عنصران ب، جـ∈ ز بحيث أن جـ^{ن} =ب^{م}=١، أ= ب جـ ⊃جـ ب.

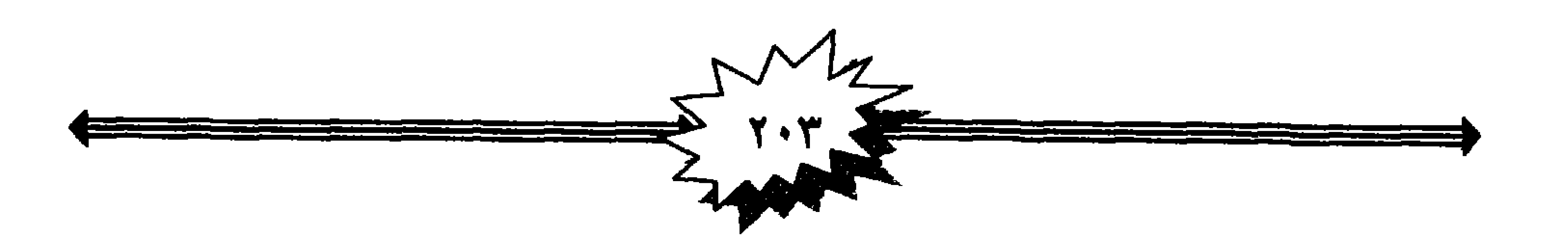
٣- لتكن ز = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} و⊗ عملية ثنائية معرفة على ز كما يلي:

أ⊗ب = (أ×ب) (٧ mod).

برهن أن الزمرة ز دائرية. ثم جد رتبة كل عنصر فيها.

٤- برهن أن ز تحتوي على عدد فردي من العناصر ذات الرتبة ٢ إذا كانت | ز | = ٢ن والرمز ن يمثل عدداً طبيعياً.

٥- برهن أن المصفوفات $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٠ & \omega \\ \omega^{٢} & ٠ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٠ & \omega^{٢} \\ \omega & ٠ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \omega^{٢} & ٠ \\ ٠ & \omega \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \omega & ٠ \\ ٠ & \omega^{٢} \end{bmatrix}$ حيث أن $\omega \neq ١$، $\omega^{٣}=١$ تكون زمرة ذات رتبة ٦ مع عملية الضرب الاعتيادية للمصفوفات، ثم جد الزمر الجزئية وحدد أيها زمرة جزئية عظمى.





٦- جد أنماط الزمر التي رتبتها ٨. ثم جد الزمر الجزئية التي رتبتها ٤ في كل زمرة من الزمر أعلاه.

٧- برهن أنه إذا كانت | ز | = م ن فإن هناك زمراً جزئية غير تافهة في الزمرة ز.

٨- برهن أن أ، و $ب^{-1}$ أ ب لهما نفس الرتبة في الزمرة ز حيث أن أ، ب ∈ ز.

٩- لتكن أ، ب، جـ عناصر في الزمرة ز، برهن أن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$، $أ^{م} أ^{ن} = أ^{م+ن}$ حيث أن كلاً من ن، م يمثل عدداً طبيعياً.

١٠- برهن أن المصفوفات التالية تكون زمرة نسبة إلى عملية الضرب الاعتيادية للمصفوفات ثم حدد الزمر الجزئية وبين إذا كانت عظمى أم لا.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

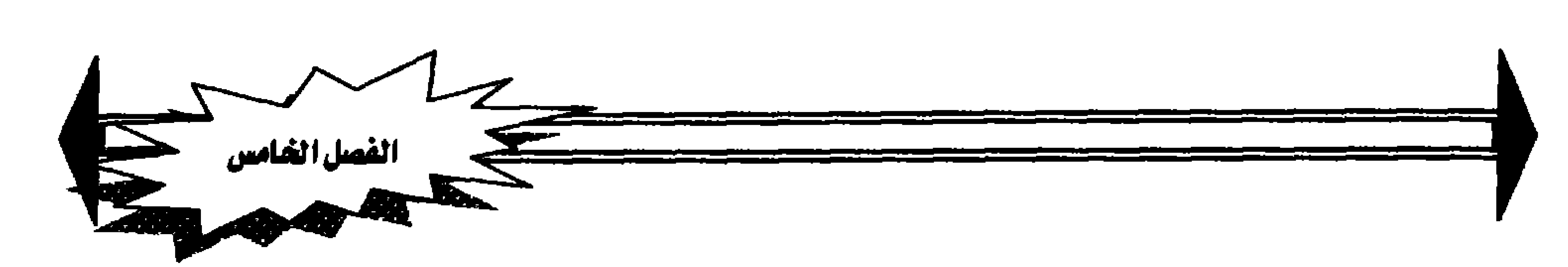
١١- برهن أن (ز، ⊕) زمرة حيث أن ز = {٠، ١، ٢، ٣} و⊕ معرفة على ز كما يلي:

أ ⊕ ب = (أ + ب) (mod ٤) ثم بيّن أن هذه الزمرة ليست متشاكلة تقابلياً مع الزمرة ي التمرين ١٠.

١٢- برهن أن الزمرة ز أبيلية إذا وفقط إذا كانت الدالة ى: ز⟵ز والمعرفة بالشكل ى(س) = $س^{-1}$ عبارة عن تشاكل تقابلي زمري بين ز ونفسها.

١٣- إذا كانت كل من هـ و ك زمرة جزئية في ز فبرهن أن <هـ ∪ ك> أصغر زمرة في ز وتحتوي على هـ و ك.





١٤- إذا كانت $ن^+$ مجموعة الأعداد النسبية الموجبة فبرهن أن $(ن^+، \times)$ تتولد من العناصر $\frac{١}{و}$ حيث تمثل و عدداً أولياً.

١٥- إذا كانت جـ زمرة جزئية في الزمرة ز وإذا عرفنا العلاقة N على ز كما يلي:

أNب إذا كان $أب^{-١} \in$ جـ فبرهن أن N علاقة تكافؤ.

١٦- ليكن أ عنصراً في الزمرة ز، برهن أنه إذا كان $أ^{ن} = ١$ فإن رتبة أ تقسم ن حيث تمثل ن عدداً طبيعياً.

١٧- إذا كانت ز زمرة وكانت أ $\in$ز و هـ $\subseteq$ ز فبرهن أن كلاً من $م_{ز}$ (أ)، $م_{ز}$ (هـ)، $س_{ز}$(هـ)، Z زمرة جزئية في ز.

١٨- إذا كانت هـ زمرة جزئية في الزمرة ز وكانت $س_{ز}$(هـ) = ز فبرهن أن هـ $\triangleleft$ ز.

(٢-٢) زمر التباديل (Permutation gropus)

(٢-٢-١) تعريف: التبديل (permutation)

لتكن X مجموعة منتهية غير خالية فكل دالة متباينة وشاملة من X إلى X تسمى تبديلاً على X.

نرمز لعناصر المجموعة المنتهية X بالأرقام ١، ٢، ٣........ن كما نمثل التبديل π على X بالرمز





$\pi = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ ....ن \\ أ_١ & أ_٢ & أ_٣ ....أ_ن \end{pmatrix}$. حيث أن $أ_هـ = (هـ)^\pi$ صور العنصر هـ بالنسبة للتبديل π، أي أن الصف الثاني هو الصف الأول ولكن بعد إعادة ترتيبه بواسطة التبديل π وكما يلي:

١ ⟵ $أ_١$

٢ ⟵ $أ_٢$

٣ ⟵ $أ_٣$

⋮

ن ⟵ $أ_٢$

ملاحظة: أ) هنا استخدمنا الرمز $(i)^\pi$ بدلاً من π (i) لملاءمته الآن ولاحقاً عند التعامل مع التباديل.

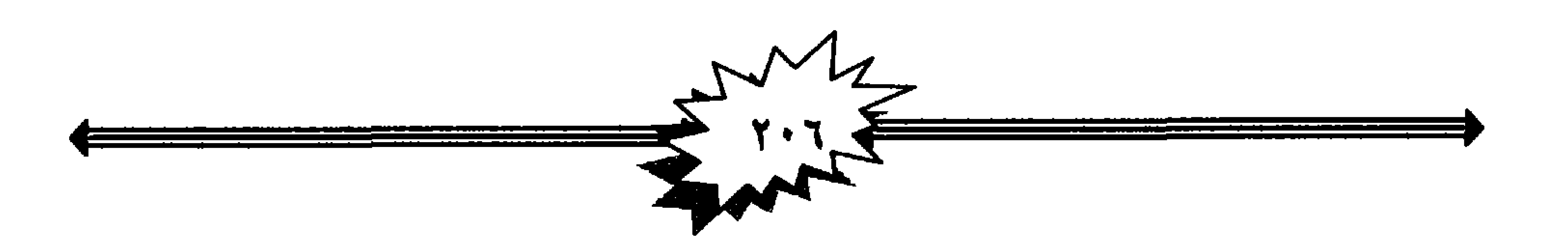
ب) من الآن فصاعداً سنكتفي بذكر (× مجموعة) بدلاً من (× مجموعة منتهية غير خالية) حيث أنها ستكون كذلك خلاف هذا الفصل، ومن الواضح أن التبديل الواحد ممكن كتابته بأشكال مختلفة مثلاً:

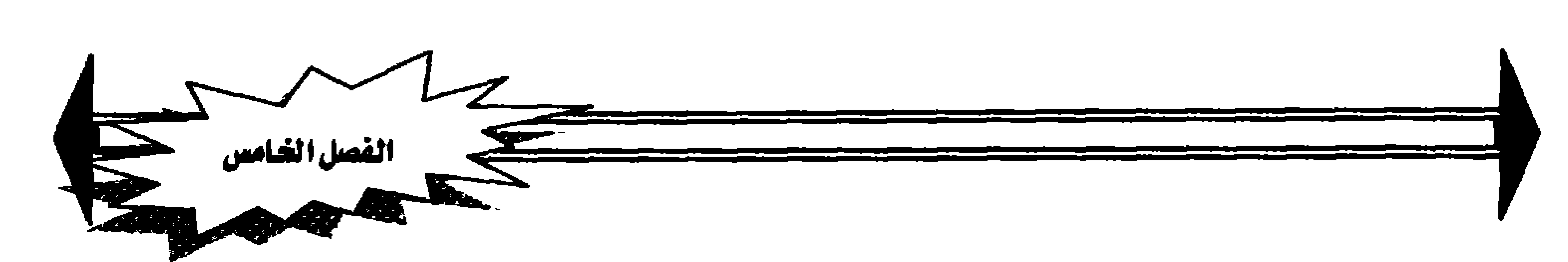
$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٤ & ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ١ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} ....$$

وهكذا وبشكل عام يوجد ن! من الأشكال المتكافئة للتبديل واحد.

ليكن $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ ....ن \\ ب_١ & ب_٢ & ب ....ب_ن \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_١ & أ_٢ ....أ_ن \\ جـ_١ & جـ_٢ ....جـ_ن \end{pmatrix}$ تبديلاً آخر على X.

تركيب التباديل π o أ هو التبديل الذي ينتج من تطبيق التبديل π أولاً ثم أ ثانياً، أي أنه نفس مفهوم تركيب الدوال.





لذا فإن: $\pi \circ \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & ن \\ جـ_1 & جـ_2 & جـ \ldots\ldots & جـ_ن \end{pmatrix}$

لأنه $\text{أ}_j = j^{\pi}$ و $\text{أ}_j^{\text{أ}}$ = جـj لكل قيم j حيث أن j = ١، ٢،..........ن.

نعرف حاصل الضرب π أ بأنه تركيب التباديل πo أ. لـذلك سنستخدم من الآن فصاعداً الرمز π أ للدلالة على تركيب التباديل πo أ.

مثال ١٢: ليكن π_1، و π_2 تبديلان حيث أن:

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ لإيجاد $\pi_1 \pi_2$ نلاحظ أن

$1 \xrightarrow{\pi_1} 2 \xrightarrow{\pi_2} 1$

$3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 4$

$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$

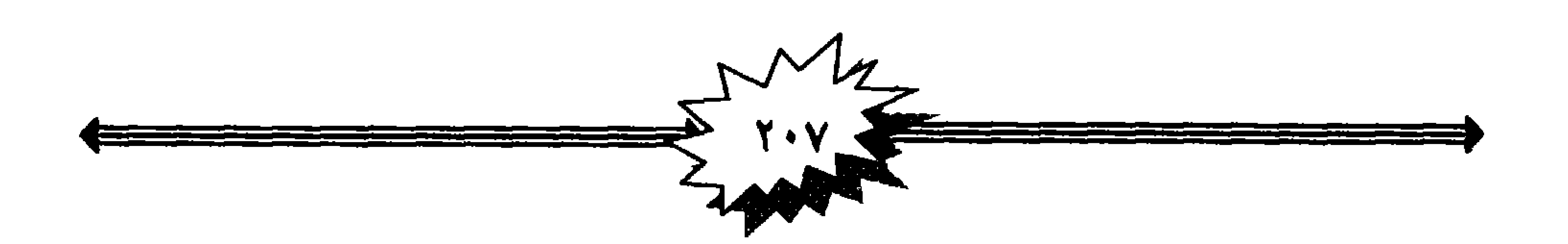
$4 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$

إذاً $\pi_2 \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ لاحـــظ أن $\pi_1 \pi_2 \neq \pi_2 \pi_1$ أي أن صـــفة الإبدال ليست متحققة.

الآن نناقش توفر شروط الزمـرة o بالنـسبة للتباديـل وعمليـة الـضرب في أعلاه. التبديل.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots\ldots\ldots & ن \\ 1 & 2 & 3 \ldots\ldots\ldots\ldots & ن \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{أ}_ن \\ \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{أ}_ن \end{pmatrix}$$

يمثل العنصر المحايـد بالنـسبة للتباديـل لأن $I\pi = \pi I = \pi$ لأي تبـديل π، كما موضح أدناه بالنسبة إلى $I\pi = \pi$.





$$1 \xrightarrow{I} 1 \xrightarrow{\pi} أ_1$$

$$2 \longrightarrow 2 \longrightarrow أ_2$$

$$3 \longrightarrow 3 \longrightarrow أ_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$ن \longrightarrow ن \longrightarrow أ_ن$$

كــذلك التبــديل $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 \dots\dots\dots أ_ن \\ 1 & 2 \dots\dots\dots ن \end{pmatrix}$ هــو نظــير التبــديل $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots\dots\dots ن \\ أ_1 & أ_2 \dots\dots\dots أ_ن \end{pmatrix}$ لأن $I = \pi^{-1}\pi = \pi\,\pi^{-1}$

كما موضح أدناه بالنسبة إلى $\pi\,\pi^{-1} = I$ حيث أن

$$1 \xrightarrow{\pi} أ_1 \xrightarrow{\pi^{-1}} 1$$

$$2 \longrightarrow أ_2 \longrightarrow 2$$

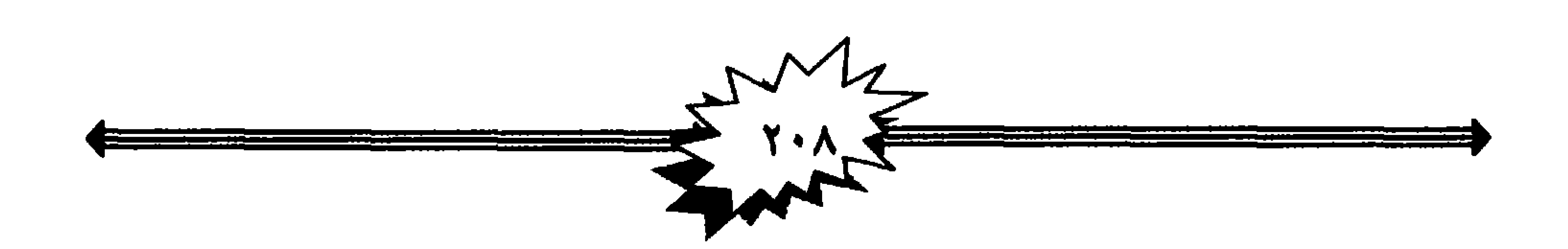
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

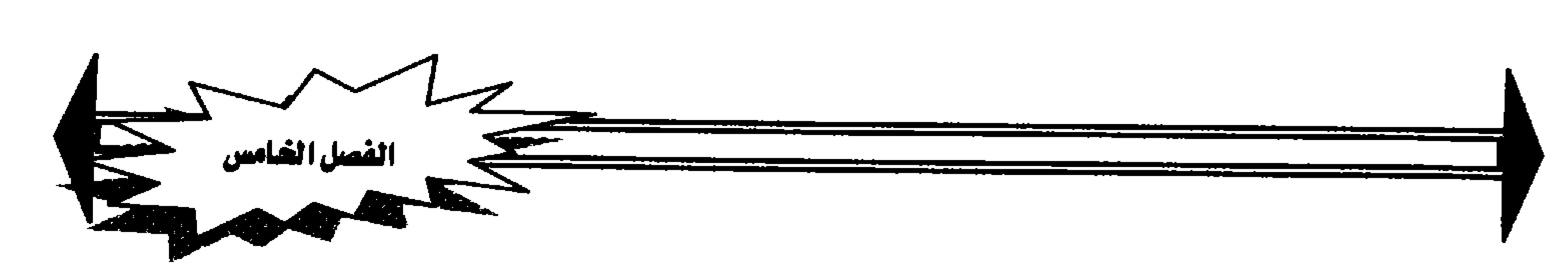
$$ن \longrightarrow أ_ن \longrightarrow ن$$

أما قانون التجميع فإنه يتحقق وبسهولة أيضاً.

(٢-٢-٢) تعريف: الزمرة المتناظرة (Symmetric group)

مجموعة التباديل على المجموعة X و ن = | X | مع عمليـة الـضرب تكـون زمرة هذه الزمرة تسمى الزمرة المتناظرة على X ويرمز لها بالرمز $ز_{ن}$.





رتبة الزمرة S_n هي ن! إذا كان احتمالات صورة العنصر الأول لأي تبديل هو ن واحتمالات صورة العنصر الثاني (ن-١) والثالث (ن-٢) وهكذا. أي أن هناك ن (ن-١) (ن-٢)... (ن- (ن-١)) = ن!

من التباديل المختلفة الزمرة التباديل S_n على المجموعة X حيث أن $|X|$ = ن.

مثال١٣: رتبة الزمرة المتناظرة S_3 هي ٦ عناصرها هي:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ب = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$جـ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

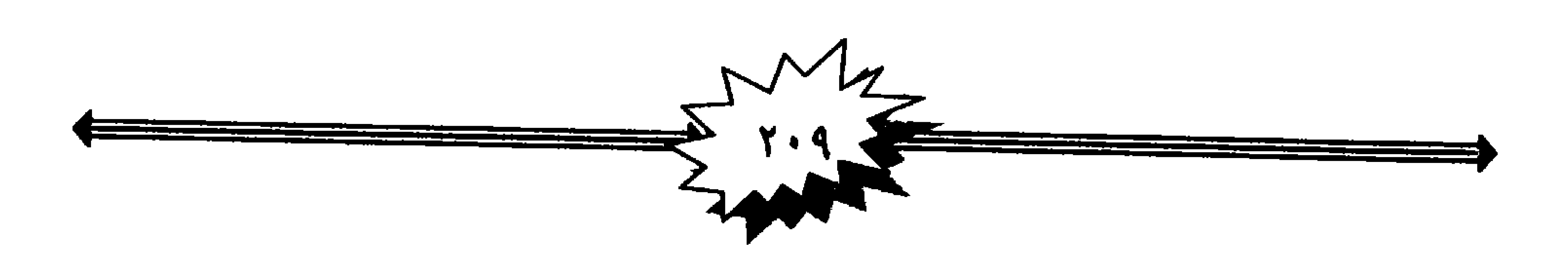
$$د = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$هـ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

بما أنه يوجد نمطان فقط للزمرة ذات الرتبة ٦، الأول الزمرة الدائرية وهي زمرة أبيلية وبما أن S_3 ليست أبيلية كما يتضح أدناه:

$$ب أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = د \qquad أ ب = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = جـ$$

إذاً الزمرة S_3 متشاكلة تقابلياً مع الزمرة ز = <أ ، ب> حيث أن $أ^3$ = $ب^2$ = $(أ ب)^2$ = ١ وللطالب أن يبرهن ذلك.





(٣-٢-٢) تعريف: إذا كانت ز زمرة تباديل على المجموعة × ون = | × | فإن ن تسمى درجة ز، أي أن ز هي زمرة تباديل على × وبدرجة ن.

(٤-٢-٢) تعريف: إذا كانت ز زمرة تباديل على المجموعة × وكانت س* ∋× فإن مدار. س* بالنسبة للزمرة ز هو: {س*ع : ع ∋ ز} ويرمز له بالرمز $ز_{س}$..

(٥-٢-٢) تعريف: إذا كانت ز زمرة تباديل على المجموعة ×، ن = | × | فإن أي عنصر س*∈× يسمى عنصراً ثابتاً بالنسبة إلى ز إذا كان س*ع = س* لكل التباديل ع∈ ز.

مثال ١٤: في زمرة التباديل الجزئية هـ = { I، ب} في الزمرة $ز_{ط٣}$ في المثال -١٣- نلاحظ أن العنصر ٢ ∈× هو عنصر ثابت كما أن مدار ٣ بالنسبة إلى هـ هو {١، ٣} وهو نفسه مدار ١ بينما مدار ٢ هو {٢}.

مثال ١٥: في الزمرة $ز_{ط٣}$ لا يوجد عنصر ثابت س*∋×، كما أن مدار أي عنصر في × هو {١، ٢، ٣}.

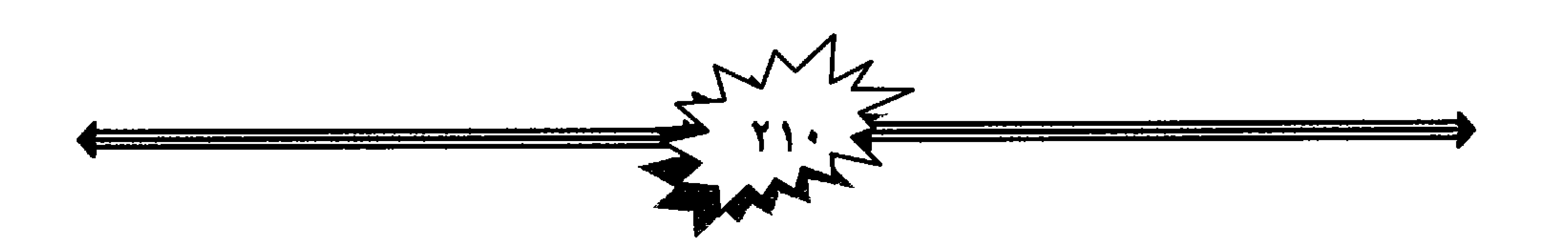
من الملائمة كتابة التبديل $\pi = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & \cdots & ن \\ م_١ & م_٢ & م_٣ & \cdots & م_ن \end{pmatrix}$ بصف واحد فقط، مثلاً $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ يمثل بالرمز الدائري (١ ٣ ٤) (٢) الذي يعني أن: ١ ⟵ ٣

٣ ⟵ ٤

٤ ⟵ ١

٢ ⟵ ٢

وأحياناً نهمل كتابة العناصر الثابتة عندما نعرف درجة ز، أي أننا نكتب التبديل أعلاه بالشكل (١ ٣ ٤) فقط وبالتالي فإن نظير التبديل (١ ٣ ٤) سيكون التبديل (١ ٤ ٣) والذي يعني



١ ⟵ ٤

٤ ⟵ ٣

٣ ⟵ ١

مثال ١٦: التباديل في الزمرة

ز٥ :
$$\pi_{١} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix} \qquad \pi_{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\pi_{٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ٥ & ٣ \end{pmatrix} \qquad \pi_{٤} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\pi_{٥} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٤ & ١ & ٥ \end{pmatrix} \qquad \pi_{٦} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$$

تمثل بالرمز الدائري:

$\pi_{١}$ = (١ ٢ ٣ ٥) $\pi_{٢}$ = (١ ٢) $\pi_{٣}$ = (٣ ٤ ٥)

$\pi_{٤}$ (١ ٢) (٣ ٤) $\pi_{٥}$ = (١ ٢ ٤)

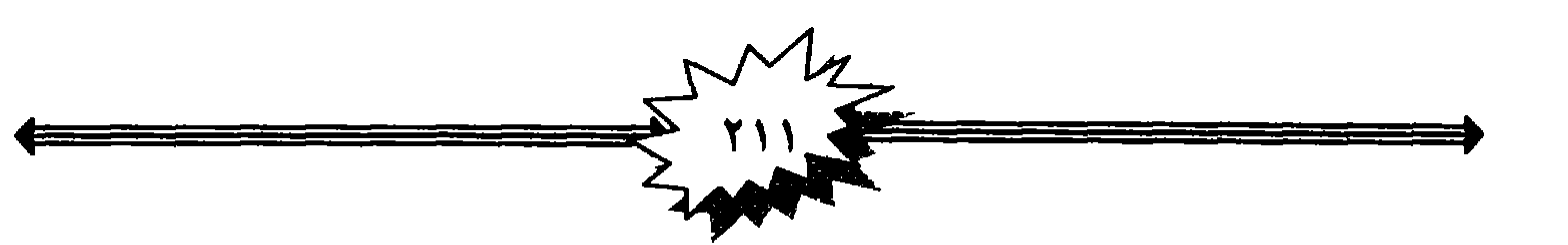
$\pi_{٦}$ = (١ ٣ ٤ ٥)

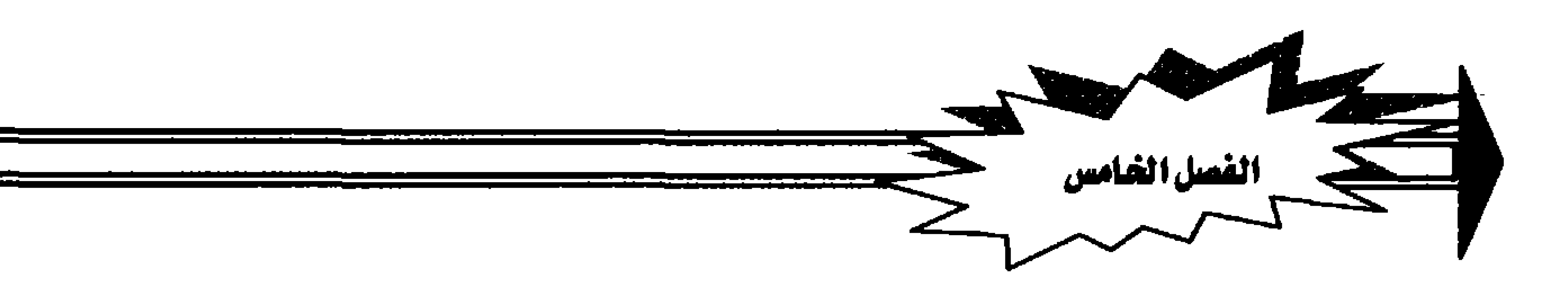
كما أن نظائر هذه التباديل هي $\pi_{١}^{-١}$ = (١ ٥ ٣ ٢) $\pi_{٢}^{-١}$ = (١ ٢)

$\pi_{٣}^{-١}$ = (٣ ٥ ٤) $\pi_{٤}^{-١}$ = (١ ٢) (٣ ٤) $\pi_{٥}^{-١}$ = (١ ٤ ٢)

$\pi_{٦}^{-١}$ = (١ ٥ ٤ ٣)

يسمى (١ ٢ ٣ ٥) في التبديل π في المثال أعلاه دورة، طول هذه الدورة هو عدد العناصر الموجودة فيها أي ٤ وبالتالي فإنها تسمى دورة رباعية،





كذلك يسمى كل من (١ ٢) (٣ ٤) في التبديل π، دورة ثنائية، أي دورة طولها ٢ وبشكل عام إذا كان:

π = (أ١) (أ٢)........(أ$_i$) (أ$_{i+1}$ .... أ$_j$) (أ$_{j+1}$.........أ$_r$)
(أ$_{ك+1}$.........أ$_ن$)

فإن كلاً من (أ١) (أ٢)........(أ$_i$)، (أ$_{i+1}$ ...... أ$_j$)، (أ$_{j+1}$......أ$_r$)......
(أ$_{ك+1}$.........أ$_ن$)

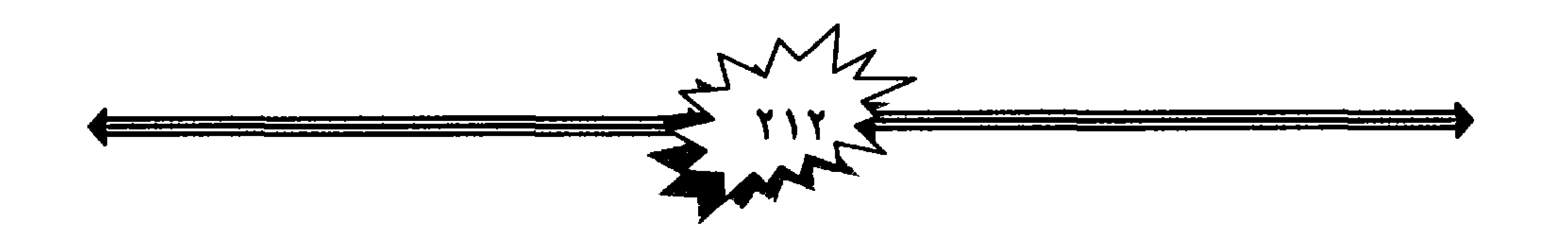
تسمى دورة في التبديل π، إن طول الدورة (أ$_i$) يكون واحداً بينما طول الدورة (أ$_{i+1}$ ... أ$_j$) هو (j – ١)، من جهة أخرى، إذا كانت π تبديلاً على المجموعة X فإن بالإمكان تجزئة X إلى مجموعات منفصلة يكون كل منها دورة للتبديل π كما مبين في أدناه:

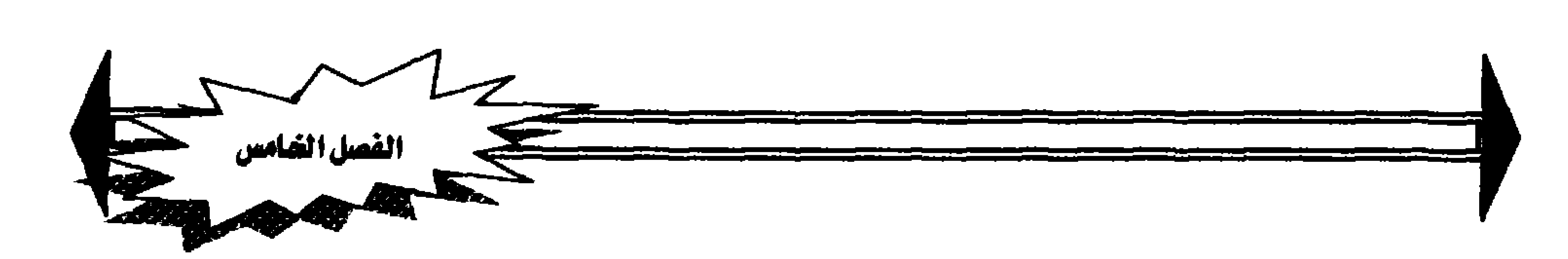
ليكن س١ ∋ س

إذا كانت $س_١^{\pi}$= س١ فإن {س١}تكون دورة في π. أما إذا كانت $س_١^{\pi}$≠ س١ فإننا نجد $س_١^{\pi^٢}$حيث أن $\pi^٢ = \pi\pi$.

إذا كانت $س_١^{\pi^٢}$ = س١ فإن {س١ ، $س_١^{\pi}$} تكون دورة في π. أما إذا كانت $س_١^{\pi^٢}$≠ س١ فإننا نجد $س_١^{\pi^٣}$. وهكذا نستمر بنفس الأسلوب إلى أن نصل إلى I بحيث $س_١^{\pi^ه}$ = س١.

وهذا وارد لكون X مجموعة منتهية. في هذه الحالة المجموعة {س١، $س_١^{\pi}$،........$س_١^{\pi^ه}$} تكون دورة في π، عندئذ نبدأ من جديد مع عنصر آخر





س$_j$ $\in X$ بحيث أن س$_j$ $\notin$ {س$_1$، س$_1^{\pi}$، .... س$_1^{h\pi}$} ونكون دورة أخرى بنفس الأسلوب ومن ثم دورة أخرى إلى أن تتوزع جميع عناصر X في المجموعات التي تكون دورات π.

بما أن التبديل دالة متباينة، إذاً لا يوجد تقاطع بين هذه الدورات.

(٦-٢-٢) مبرهنة:

رتبة أي تبديل π هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال دوراته.

البرهان:

لتكن (س$_1$ س$_2$ ....س$_ن$) دورة للتبديل π، بما أن س$_i^{\pi^j}$= س$_{i \oplus j}$.

حيث أن $i \oplus j = (i+j) \bmod$ (ن) فإن س$_i^{\pi^m}$= س$_i$ إذا وفقط إذا كانت م أحد مضاعفات ن، فهذا يعني أن س$_i$ = س$_i^{\pi^{m^*}}$ لكل العناصر س$_i$ $\in X$ إذا وفقط إذا كان م* المضاعف المشترك الأطول دورات π فإن رتبة π هي المضاعف المشترك الأصغر لدوراته.

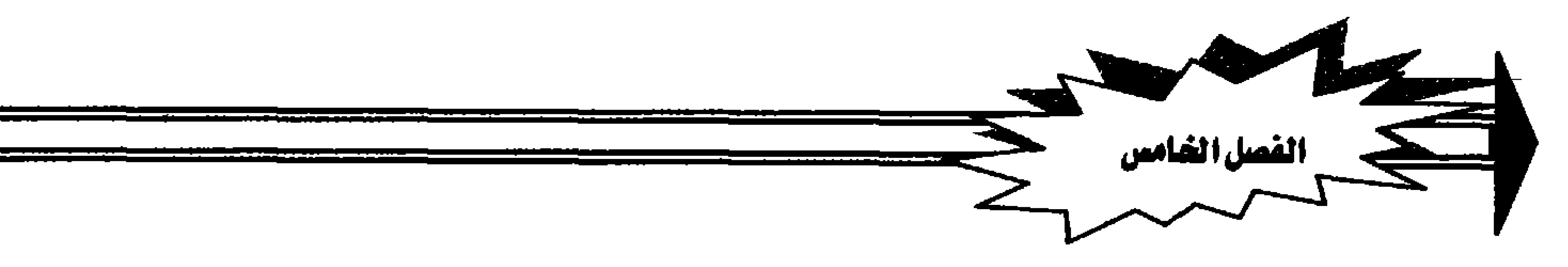
(٧-٢-٢) مبرهنة تمهيدية:

إذا كانت π_1 = (أ$_{11}$ .... أ$_{1ر}$) (أ$_{12}$ .... أ$_{2س^*}$)

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} أ_{11} \cdots أ_{1ر} & أ_{12} \cdots أ_{2س} \cdots أ_{م1} \cdots أ_{مم^*} \\ ب_{11} \cdots ب_{1ر} & ب_{12} \cdots ب_{2س} \cdots ب_{م1} \cdots ب_{مم^*} \end{pmatrix} \cdot (أ_{م1} \cdots أ_{مم^*})$$

فإن





$\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2$ = (ب١١........ب١ر) (ب١٢........ب٢س*) (بم١........بمم*).

البرهان:

بما أن:

ب زك ←(π٢)— أ زك ←(π١)— أ ز(ك+١) —(π٢)→ ب ز(ك+١) فإن ب زك —(π١⁻¹π١π٢)→ ب ز(ك+١)

(٨-٢-٢) مبرهنة: أي تبديلين في الزمرة المتناظرة زظن يكونـان مترافقـين إذا وفقط إذا كانا يملكان نفس العدد من الدورات لكل طول.

البرهـان: إذا كانـا التبـديلان مترافقـين فإنهمـا يملكـان نفـس العـدد مـن الدورات لكل طول حسب المبرهنة التمهيدية السابقة.

الآن نفرض أن

ت= (أ١١........أ١ر) (أ١٢........أ٢س*) (أم١........أمك)

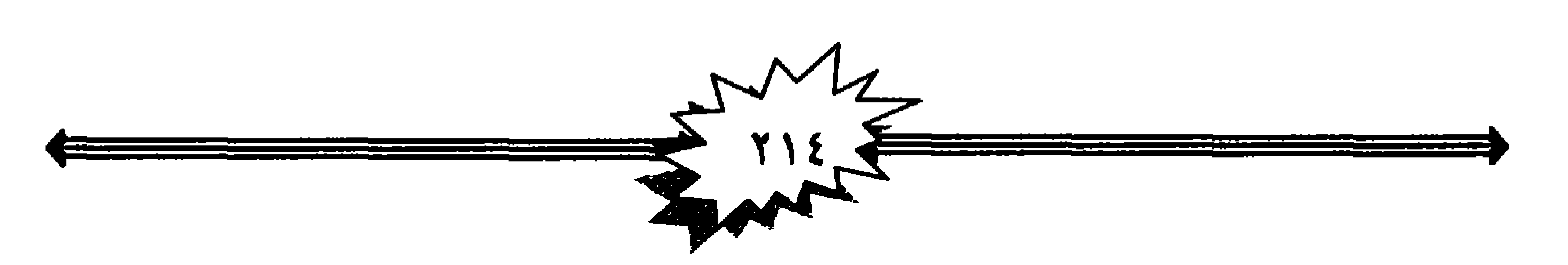
ر* = (ب١١........ب١ر) (ب١٢........ب٢س*) (بم١........بمك)

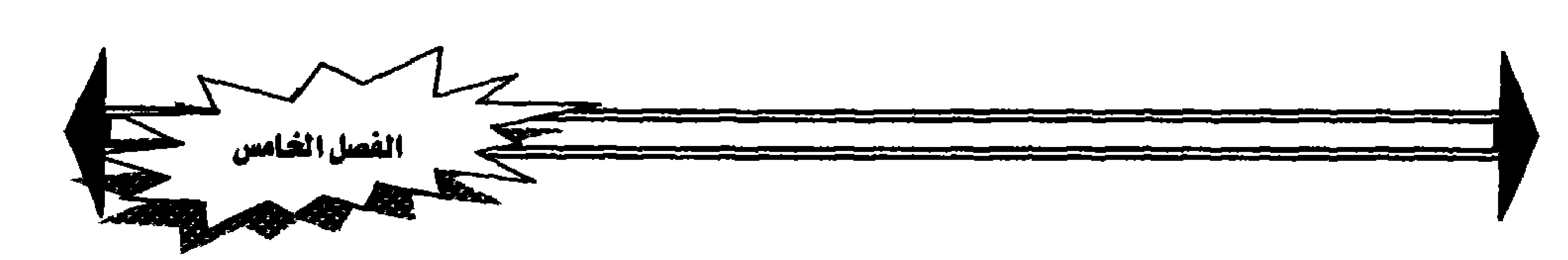
أي أن التبديلين يملكان نفس العدد من الدورات لكـل طـول. إذاً التبـديل ك* ∈ زظن حيث أن:

$$ك^* = \begin{pmatrix} أ_{11}\cdots أ_{1ر} & أ_{12}\cdots أ_{2س} & \cdots & أ_{م1}\cdots أ_{مك} \\ ب_{11}\cdots ب_{1ر} & ب_{12}\cdots ب_{2س} & \cdots & ب_{م1}\cdots ب_{مك} \end{pmatrix}$$

يحقق العلاقة ك*⁻¹ت ك = ر*.

مثال (١٧): في الزمـرة المتنـاظرة زظ٣ نلاحـظ أن التبـديلين (١ ٢ ٣) (١ ٣ ٢) مترافقـان بواسـطة التبـديل (١) (٢ ٣) إذا أن (١ ٣ ٢) = (١)





(٢ ٣) (١ ٢ ٣) (١) (٢ ٣) كمـا أن التباديـل (٣) (١ ٢) (٢) (١ ٣) (١) (٢ ٣) مترافقة بواسطة التبديل (١ ٢ ٣).

إذ (١ ٣ ٢) (١) (٢ ٣) (١ ٣ ٢) = (٢) (١ ٣).

(١ ٣ ٢) (٢) (١ ٣) (١ ٣ ٢) = (٣) (١ ٢).

ما تقدم يتبين أن عدد صفوف الزمرة المتناظرة زطن على المجموعة X هـو نفس عدد احتمالات تجزئة المجموعة X. وإن عملية التجزئة تمثل بالرمز

١^هـ١ ٢^هـ٢ ٣^هـ٣ ....ن^هـن والتي تعني أن هناك هـ من الـدورات الـتي طول كل منها ١ و هـ٢ من الدورات الـتي طـول كـل منهـا ٢،........ هـن مـن الدورات التي طول كل منها ن.

مثال ٨: التبديل (١) (٢) (٣) (٤ ٥) (٦ ٧) يقع ضمن صف التبـديلات الممثلة $1^3\ 2^2$. والتبـديل (١ ٢ ٣) (٤ ٥ ٦) (٧) يقـع ضـمن صـف التبديلات الممثلة بالتجزئة.

مثال ١٩: صفوف الزمرة المتناظرة زط٣ هي:

١^٣	٢ ١	٣
(١) (٢) (٣)	(١) (٢ ٣)	(١ ٢ ٣)
	(٢) (١ ٣)	(١ ٣ ٢)
	(٣) (١ ٢)	



مثال ٢٠: صفوف الزمرة المتناظرة $ز_{٤}$ هي:

$١^{٤}$	١ ٣	$٢^{٢}$	$١^{٢}$ ٢	٤
(١)(٢)(٣)(٤)	(١)(٢ ٣ ٤)	(١ ٢)(٣ ٤)	(١)(٢)(٣ ٤)	(١ ٢ ٣ ٤)
	(١)(٢ ٤ ٣)	(١ ٣)(٢ ٤)	(١)(٣)(٢ ٤)	(١ ٢ ٤ ٣)
	(٢)(١ ٣ ٤)	(١ ٤)(٢ ٣)	(١)(٤)(٢ ٣)	(١ ٣ ٢ ٤)
	(٢)(١ ٤ ٣)		(٢)(٣)(١ ٤)	(١ ٣ ٤ ٢)
	(٣)(١ ٢ ٤)		(٢)(٣)(١ ٣)	(١ ٤ ٢ ٣)
	(٣)(١ ٤ ٢)		(٣)(٤)(١ ٢)	(١ ٤ ٣ ٢)
	(٤)(١ ٢ ٣)			
	(٤)(١ ٣ ٢)			

(٩-٢-٢) مبرهنة: إذا كانت π تبديلاً يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة.
$١^{هـ_١}\ ٢^{هـ_٢}\ ٣^{هـ_٣} ....ن^{هـ_ن}$ فإن عدم التباديل المرافقة إلى π (أ التي تقع ضمن نفس صف التبديل π) في الزمرة المتناظرة $ز_{ن}$ هو:

$$\frac{ن!}{١^{هـ_١}\, هـ_١!\ ٢^{هـ_٢}\, هـ_٢!\ ٣^{هـ_٣}\, هـ_٣! \ldots ن^{هـ_ن}\, هـ_ن!}$$

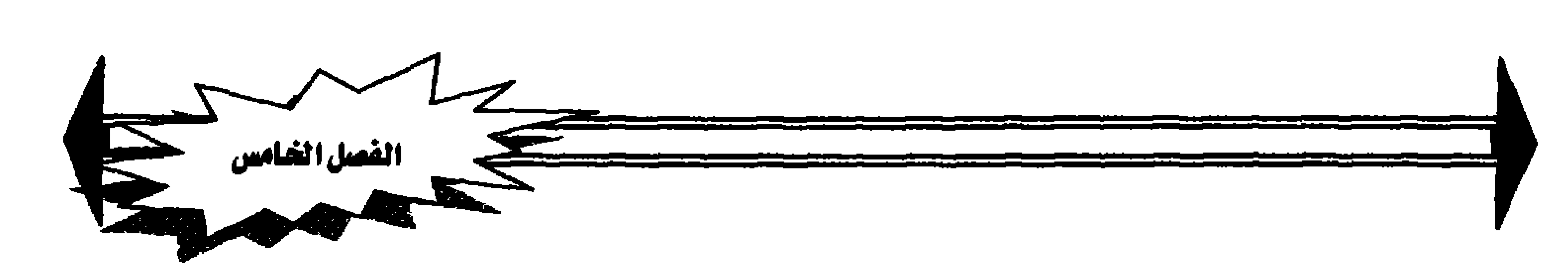
البرهان: نفرض أن π يقع ضمن صف التبديلات الممثلة بالتجزئة أي أن:

$١^{هـ_١}\ ٢^{هـ_٢}\ ٣^{هـ_٣} ....ن^{هـ_ن}$

$$π = \underbrace{(\cdot)(\cdot)......(\cdot)}_{هـ_١}\quad \underbrace{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)......(\cdot\cdot)}_{هـ_٢}\quad \underbrace{(\cdot)......(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}_{هـ_ن}$$

من الواضح أن هناك ن من الفراغات يمكن أن تملأ بعناصر، بأي شكل كان، لكي تعطي تبديل في $ز_{ن}$، جميع هذه التباديل في نفس صف التباديل الممثلة بالتجزئة أعلاه.

لذا، هناك ن! من الاحتمالات لتنظيم هذه العناصر التي تعطي تباديل في $ز_{ن}$ ولكن هذه التباديل ليست جميعها متمايزة.



لتكن $هـ_ز$ عدد الدورات الموجودة في (*) والتي طول كل منها j حيث أن $١ \leq j \leq ن$ إذاً، هناك $|ز_{هـ_ن}| = هـ_ز!$ من الاحتمالات لتركيب هذه الدورات التي تنتج نفس التبديل π في $ز_{ط_ن}$.

بنفس الوقت فإن كل دورة $(أ_١ \quad أ_٢ \ldots\ldots أ_j)$ يمكن أن تكتب بـ j من الاحتمالات وهي:

$(أ_١ \quad أ_٢ \ldots\ldots أ_j) = (أ_٢ \quad أ_٣ \ldots\ldots أ_j \, أ_١) = (أ_j \, أ_١ \quad أ_٢ \ldots\ldots أ_{ن-١})$.

إذاً، أي تبديل في $ز_{ط_ن}$ محسوب $١^{هـ_١} \, هـ_١ ! \; ٢^{هـ_٢} هـ_٢ ! \ldots\ldots\ldots\ldots ن^{هـ_ن} \, هـ_ن$ من المرات بما يخص جميع الدورات التي تمثل $π \neq ٠$

(١٠-٢-٢) قضية:

إذا كان π تبديلاً يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة

$١^{هـ_١} \; ٢^{هـ_٢} \ldots\ldots ن^{هـ_ن}$ فإن رتبة المركز إلى π في $ز_{ط_ن}$ هي:

$|م_{ز_{ط_ن}}(π)| = ١^{هـ_١} \, هـ_١ ! \; ٢^{هـ_٢} هـ_٢ ! \ldots\ldots\ldots\ldots ن^{هـ_ن} \, هـ_ن$

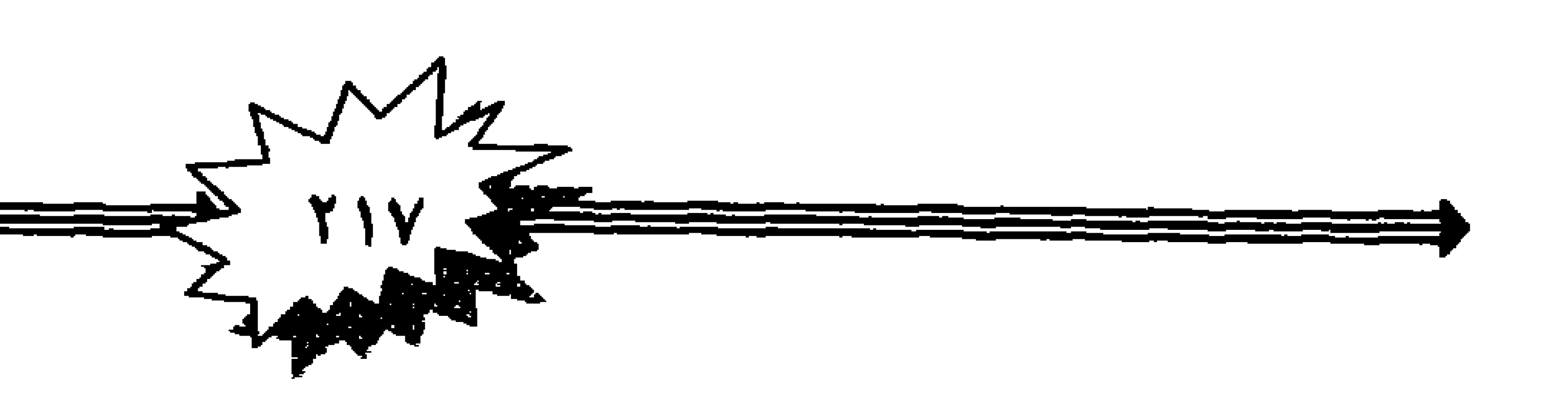
مثال ٢١: في الزمرة المتناظرة $ز_{ط_٥}$، التبديل أ = (١ ٢) (٣) (٤) (٥) يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة $٢^{١} \; ١^{٥}$، إذاً:

$|م_{ر_{ط_٥}}(أ)| = ٢^{١} . ١ ! . ١^{٣} . ٣ ! = ١٢$.

وهي التباديل: (١) (٢) (٣) (٤) (٥)، (١ ٢) (٣) (٤) (٥)

(١) (٢) (٣) (٤ ٥)، (١ ٢) (٣) (٤ ٥)

(١) (٢) (٤) (٣ ٥)، (١ ٢) (٤) (٣ ٥)



(١) (٢) (٥) (٣ ٤)، (١ ٢) (٥) (٣ ٤)

(١) (٢) (٣ ٤ ٥)، (١ ٢) (٣ ٤ ٥)

(١) (٢) (٣ ٥ ٤)، (١ ٢) (٣ ٥ ٤)

(١١-٢-٢) تعريف: نسمي التبديل الذي يتكون من دورة واحدة بطول ٢ (أي دورة ثنائية واحدة) بينما يكون طول بقية الدورات ١ فقط تبديلاً ثنائياً. أي أنه يقوم بتثبيت جميع العناصر ما عدا اثنين. من الواضح أن أي تبديل يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة $١^{هـ-١}$ ٢ هو تبديل ثنائي (Transposition).

مثال٢٢: التباديل الثنائية في $ز_{ط_٣}$ هي:

١	٢
(١)	(٢ ٣)
(٢)	(١ ٣)
(٣)	(١ ٢)

مثال٢٣: التباديل الثنائية في $ز_{ط_٤}$ هي:

$١^٢$	٢
(١) (٢)	(٣ ٤)
(١) (٣)	(٢ ٤)
(١) (٤)	(٢ ٣)
(٢) (٣)	(١ ٤)
(٢) (٤)	(١ ٣)
(٣) (٤)	(١ ٢)

من الواضح أن زمرة التناظر $ز_{ن}$ تحتوي على $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ من التباديل الثنائية.

(١٢-٢-٢) مبرهنة:

كل تبديل يمكن أن يمثل على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية.

البرهان: كل تبديل يمثل بالرمز الدائري على شكل دورات. كل دورة يمكن تمثيلها على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية كما مبيَّن أدناه.

$$(أ_{١} \quad أ_{٢} \;......\; أ_{ن}) = (أ_{١}\, أ_{٢})\,(أ_{١}\, أ_{٣}) ...... (أ_{١}\, أ_{ن})$$

مثال٢٤:

نبين في أدناه تمثيل بعض عناصر $ز_{٤}$ على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية.

(٤) (١ ٢ ٣) = (٣) (٤) (١ ٢) (٢) (٤) (١ ٣)

(١ ٤ ٢ ٣) = (٣) (١ ٤) (٣) (٤) (١ ٢)

(٢) (٤) (١ ٣)

وعند إهمال العناصر الثابتة فإنها تمثل كما يلي:

(١ ٢ ٣) = (١ ٢) (١ ٣)

(١ ٤ ٢ ٣) = (١ ٤) (١ ٢) (١ ٣)

(١٣-٢-٢) وهكذا نتيجة:

الزمرة المتناظرة $ز_{ن}$ تولد من الـ (ن-١) من التبادل الثنائية

(١ ٢)، (١ ٣)، (١ ٤)،........(١ ن).



(٢-٢-١٤) تعريف: التبديل الزوجي (Even Permutation):

التبديل الزوجي هو التبديل الذي يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب عدد زوجي من التباديل الثنائية على هذا الأساس فإن التبديل الفردي (odd permutation) هو الذي يمثل بشكل حاصل ضرب عدد فردي من التباديل الثنائية.

من الواضح أن العنصر المحايد يعتبر تبديلاً زوجياً إذ يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب أي تبديلين ثنائيين متساويين. مثلاً:

(١) (٢) (٣).......(ن) = (١ ٢) (١ ٢).

من الواضح أنه إذا كانت π_1 π_2 تبديلين زوجيين وπ_3 π_4 تبديلين فرديين فإن π_1 π_2 تبديل زوجي، π_1 π_3 تبديل فردي، π_3 π_4 تبديل زوجي إذ أن عدد التباديل الثنائية إلى π_i π_j هو مجموع التباديل الثنائية لكل من π_i، و π_j مطروحاً منه عدد التباديل الثنائية المتشابهة وهو عدد زوجي دائماً.

مثال٢٥:

ليكن ٲ = (١ ٢ ٣) (٤) (٥)   جـ = (١ ٢ ٣ ٤) (٥)

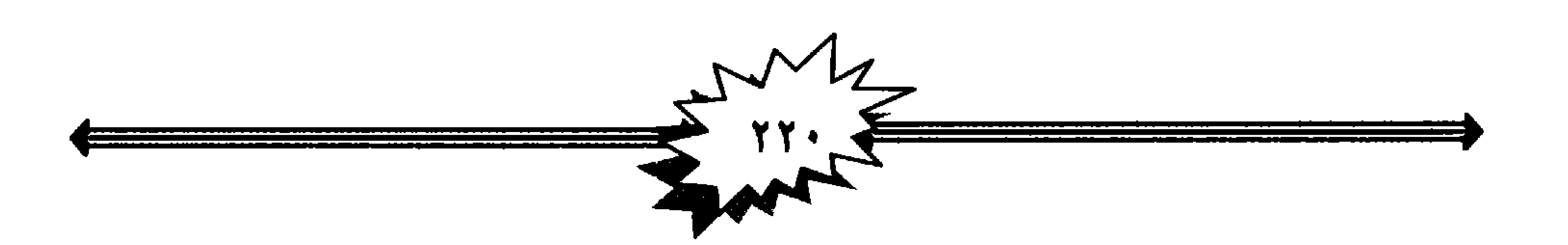
ب= (١ ٢) (٤ ٥) (٣)

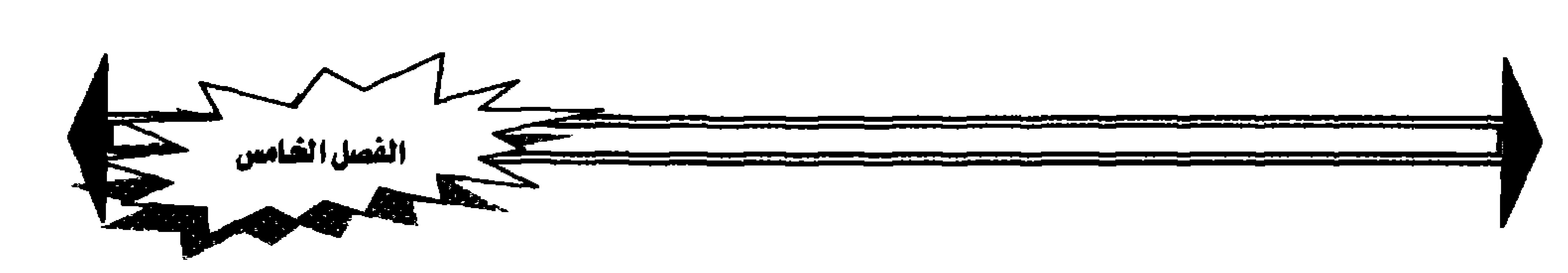
د = (١ ٢) (٣) (٤) (٥) من الواضح أن ٲ، ب تبديلان زوجيان لكون

ٲ= (١ ٢) (١ ٣)   ب= (١ ٢) (٤ ٥)

بما أن:

ٲب = (١ ٢) (١ ٣) (١ ٢) (٤ ٥) حيث أن (١ ٢) متكررة مرتين وأن $(١ \ ٢)^{٢}$ = ١ فإن





أب= (١ ٣) (٤ ٥) تبديل زوجي.

التبديلان جـ، د فرديان لكون

جـ = (١ ٢) (١ ٣) (١ ٤) د= (١ ٢)

بما أن جـ د = (١ ٢) (١ ٣) (١ ٤) (١ ٢) = (١ ٣) (١ ٤). فإن جـ د تبديل زوجي.

(١٥-٢-٢) مبرهنة: تكون مجموعة التباديل الزوجية في كل زمرة تباديل ز، زمرة جزئية سويّة هـ في ز كما أن: [ز:هـ] = ٢ أو [ز:هـ] = ١

البرهان: لتكن هـ مجموعة التباديل الزوجية في ز، فإن هـ زمرة جزئية في الزمرة ز (للطالب أن يتحقق من ذلك) فإذا كانت ز = هـ فإن المبرهنة صحيحة. نفرض أن هـ $\lneq$ ز أي يوجد على الأقل تبديل فردي π_1 في ز، $\pi_1 \notin$ هـ إذاً:

هـ $\pi_1 \neq$ هـ ولتكن π_2 تبديلاً فردياً آخر في ز بحيث أن $\pi_2 \notin$ هـ.

فإن $\pi_1 \pi_2^{-1}$ تبديل زوجي وبالتالي فإنه ينتمي إلى

هـ، إذاً هـ $\pi_1 \pi_2^{-1}$ = هـ $\longrightarrow$ هـ π_1 = هـ π_2

هذا يعني أن [ز:هـ] = ٢ وبالتالي فإن هـ $\trianglelefteq$ ز.

(١٦-٢-٢) تعريف: الزمرة المتناوبة (Alternating group)

زمرة التباديل الزوجية، وهي زمرة جزئية سوية في $ز_{ظ_ن}$، ن > ٢، تسمى الزمرة المتناوبة ويرمز لها بالرمز $ز_{ت_ن}$، رتبة هذه الزمرة هي $\frac{1}{2}$ن !.

أي أن [$ز_{ظ_ن}$: $ز_{ت_ن}$] = ٢

مثال ٢٦: الزمرة المتناوبة في زط٣ هي: |زت٣| = ٣، زت٣ = {(١) (٢) (٣)، (١ ٢ ٣)، (١ ٣ ٢)}

(١٧-٢-٢) مبرهنة: الزمرة المتناوبة زتن، ن ≥ ٣ تولّد بالتباديل (١ ٢ ٣)، (١ ٢ ٤)،.... (١ ٢ ن).

البرهان: نحن نعلم بأن كل تبديل زوجي يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب عدد زوجي من التباديل الثنائية أي أن زتن يمكن أن تولد بالأزواج (١ i) (١ j) إذا كانت i = j فإن

(١ i) (١ j) = (١ i)^٢ = (١) (j)

لذلك سنفرض أن i ≠ j، في هذه الحالة (١ i) (١ j) = (١ i j)

إذا كانت i = ٢ فالمبرهنة صحيحة إذ أننا سنحصل على التبديل (١ ٢ ل) وهو أحد التباديل في المبرهنة أعلاه.

كذلك إذا كان j = ٢ فإن المبرهنة صحيحة إذ أننا سنحصل على

(١ i j) = (١ i ٢) = (١ ٢ i)^٢

أما إذا كانت i > ٢، و j > ٢ فإن

(١ i j) = (١ ٢ j) (١ ٢ i) (١ ٢ j)^١- من الواضح أن (١ ٢ j)^١-، (١ ٢ i)، (١ ٢ j) تقع جميعها ضمن التباديل أعلاه # .

(١٨-٢-٢) مبرهنة: الزمرة المتناوبة زتن ليست بسيطة.

البرهان: بما أن زت٤ زمرة التبادل الزوجية في زط٤ تحتوي على التباديل التالية:

$١^{٤}$	$٣\ ١$	$٢^{٢}$
(١)(٢)(٣)(٤)	(١)(٢ ٣ ٤)	(١ ٢)(٣ ٤)
	(١)(٢ ٤ ٣)	(١ ٣)(٢ ٤)
	(٢)(١ ٣ ٤)	(١ ٤)(٢ ٣)
	(٢)(١ ٤ ٣)	
	(٣)(١ ٢ ٤)	
	(٣)(١ ٤ ٢)	
	(٤)(١ ٢ ٣)	
	(٤)(١ ٣ ٢)	

ولتكن V = {(١)(٢)(٣)(٤)، (١ ٢)(٣ ٤)، (١ ٣)(٢ ٤)، (١ ٤)(٢ ٣)}.

من الواضح أن V زمرة جزئية $ز_{ت٤}$.

بما أن التبديلين أ و $ب^{-١}$أب نفس الرتبة وهي ٢ عندما

ب $\in ز_{ت٤}$، أ $\in V$

وبما أن V تحتوي على جميع عناصر $ز_{ت٤}$ ذات الرتبة ٢. فإن V تحتوي على جميع العناصر المرافقة لعناصرها بواسطة عناصر $ز_{ت٤}$،

هذا يعني أن $V \trianglelefteq ز_{ت٤}$.

(٢-٢-١٩) مبرهنة غالوا (Galols Theorem):

الزمرة المتناوبة $ز_{تن}$ بسيطة عندما ن $\neq$ ٤.

البرهـان: بمـا أن $|ز_{ت٢}| = ١$ و $|ز_{ت٣}| = ٣$ والعـدد ٣ أولـي فـإن $ز_{ت٢}$ و$ز_{ت٣}$ زمرتان بسيطتان الآن نفرض أن ن $\leq$ ٥، وسـنبرهن أنـه إذا كانـت س $\trianglerighteq$ $ز_{تن}$ وكانت $|س| \neq ١$ فإن س = $ز_{تن}$. لتكن س $\trianglerighteq$ $ز_{تن}$ و $|س| \neq ١$.

أ) نفرض أن س تحتوي على التبديل α = (أ ب جـ)، سنبرهن أن س تحتوي على جميع التباديـل β= (س ص ع) حيـث أن س ص ع عناصـر مختلفـة وهـــذا يعـــني حـــسب المبرهنـــة الـــسابقة أن س = $ز_{تن}$

ليكن $\gamma = \begin{pmatrix} أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \end{pmatrix}$ أن تباديل الزمرة المتناظرة $ز_{ظن}$ ومن الواضـح أنه لا يثبت على الأقل عنـصرين في ×، علـى أسـاس أن العناصـر الـتي لم تدرج في γ عناصر ثابتة وأن ن $\leq$ ° كذا بالنسبة إلى α ومن الواضح أن:

$\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$. فإذا كانت γ تبديلاً زوجياً فإن هذا يعـني أن β مرافـق α في $ز_{تن}$ وبالتالي فإن $\beta \in$ س. لكون س $\trianglerighteq$ $ز_{تن}$.

أما إذا كانت γ تبديلاً فردياً فـإن $\delta\,\gamma$ سـتكون تبـديلاً زوجيـاً ينتمـي إلى $ز_{تن}$ لأي تبديل فردي δ. ليكن (هـ ق) = δ حيث أن ف، هـ عنـصران ثابتـان بالنسبة إلى α، من الواضح أن δ تبديل فردي كما أنها تحقق صفة الإبدال مع α، لذا $(\gamma\,\alpha)^{-1}\alpha\,(\gamma\,\delta) = \gamma^{-1}\delta^{-1}\alpha\,\delta\,\gamma = \gamma^{-1}\alpha\,\delta^{-1}\delta\,\gamma = \gamma^{-1}\alpha\,\gamma = \beta$.

وهذا يعني أن β هو مرافق α في $ز_{تن}$ وبالتالي فإن $\beta \in$س

لكون س $\trianglerighteq$ $ز_{تن}$.

الآن برهنا بأنه إذا كانت $\alpha \in$ س تبديلاً في صف التجزئة ٣ $١^{(ن-٣)}$

فإن س = $ز_{تن}$.

ب) نفرض أن س تحتوي على التبديل $\omega = \gamma_١\,\gamma_٢ \ldots\ldots \gamma_ن$.

حيث أن $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_{\text{ن}}$ ، $\gamma_1 = (\text{أ}_1\ \text{أ}_2 \ldots\ldots \text{أ}_{\text{م}})$ دورات، كما أن طول الدورة γ_1 أكثر من ٣ حيث أن م > ٣ ومن الواضح أن $\sigma = (\text{أ}_1\ \text{أ}_2\ \text{أ}_3)$ تبديل زوجي يحقق صفة الإبدال مع كل الدورات $\gamma_2\ \gamma_3 \ldots\ldots \gamma_{\text{ن}}$.

$\omega_1 = \sigma^{-1}\omega\sigma = (\sigma^{-1}\gamma_1\sigma)\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots\ldots \gamma_{\text{ن}}$. ينتمي إلى $\text{ز}_{\text{ن}}$ لكون س $\trianglelefteq \text{ز}_{\text{ن}}$. كذلك $\omega_1\ \omega^{-1} \in$ س لكون س زمرة.

بما أن كلاً من γ_1 و $\sigma^{-1}\gamma\sigma$ يحقق صفة الإبدال مع $\gamma_2\ \gamma_3 \ldots\ldots \gamma_{\text{ن}}$ فإن:

$$\omega_1\ \omega^{-1} = (\sigma^{-1}\omega\sigma)$$

$$= (\text{أ}_2\ \text{أ}_3\ \text{أ}_1\ \text{أ}_4\ \text{أ}_5 \ldots\ldots \text{أ}_{\text{م}})(\text{أ}_{\text{م}}\ \text{أ}_{\text{م}-1} \ldots\ldots \text{أ}_4\ \text{أ}_3\ \text{أ}_2\ \text{أ}_1)$$

$$= (\text{أ}_1\ \text{أ}_3\ \text{أ}_{\text{م}})(\text{أ}_2)(\text{أ}_4)(\text{أ}_5)\ldots\ldots\ldots(\text{أ}_{\text{م}-1})$$

$$= (\text{أ}_1\ \text{أ}_3\ \text{أ}_{\text{م}}).$$

وهذا يعني كما برهنا في الجزء الأول أن س = $\text{ز}_{\text{ن}}$.

جـ) نفرض أن س تحتوي التبديل $\omega = \alpha\beta\lambda$ الذي يحتوي على دورتين طول كل منهما ٣ في الأقل، أي أن:

$\alpha = (\text{أ}_1\ \text{أ}_2\ \text{أ}_3)$ ، $\beta = (\text{ب}_1\ \text{ب}_2\ \text{ب}_3)$ كما أن λ لا تعتمد على $\text{أ}_{\text{هـ}}$، $\text{ب}_{\text{هـ}}$. حيث هـ= ١، ٢، ٣

لتكن $\sigma = (\text{أ}_2\ \text{أ}_3\ \text{ب}_1)$ تبديلاً في $\text{ز}_{\text{ن}}$ ومن الواضح أن σ تحقق صفة الإبدال مع λ بما أن س $\trianglelefteq \text{ز}_{\text{ن}}$.



فإن $\omega_1 = \sigma^{-1}\omega\sigma = \sigma^{-1}\alpha\beta\lambda\sigma = (\sigma^{-1}\alpha\sigma)(\sigma^{-1}\beta\sigma)\lambda$.

ينتمي إلى $ز_ن$

بما أن س زمرة، فإنها تحتوي على التبديل $\omega_1\omega^{-1}$ حيث أن $\omega_1\omega^{-1} = (\sigma^{-1}\alpha\sigma)(\sigma^{-1}\beta\sigma)\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

= (أ١ أ٣ ب١) (أ٢ ب٢ ب٣) (أ٣ أ٢ أ١) (ب٣ ب٢ ب١)

= (أ١ أ٢ ب١ أ٣ ب٣).

هذا يعني أن س تحتوي على تبديل طول إحدى دوراته أكثر من ٣ لذا فإن س = $ز_ن$. كما بينا في (ب).

د- نفرض أن $\omega \in$س تبديل يحتوي على دورة واحدة فقط بطول ٣ أي أن:

ω = (أ١ أ٢ أ٣) λ حيث أن λ حاصل ضرب دوراته ثنائية منفصلة، أي أن

λ^2 = ١، إذاً ω^2= (أ١ أ٢ أ٣) $\in$س. وهذا ينتج كما بينا في (أ) أن س = $ز_ن$.

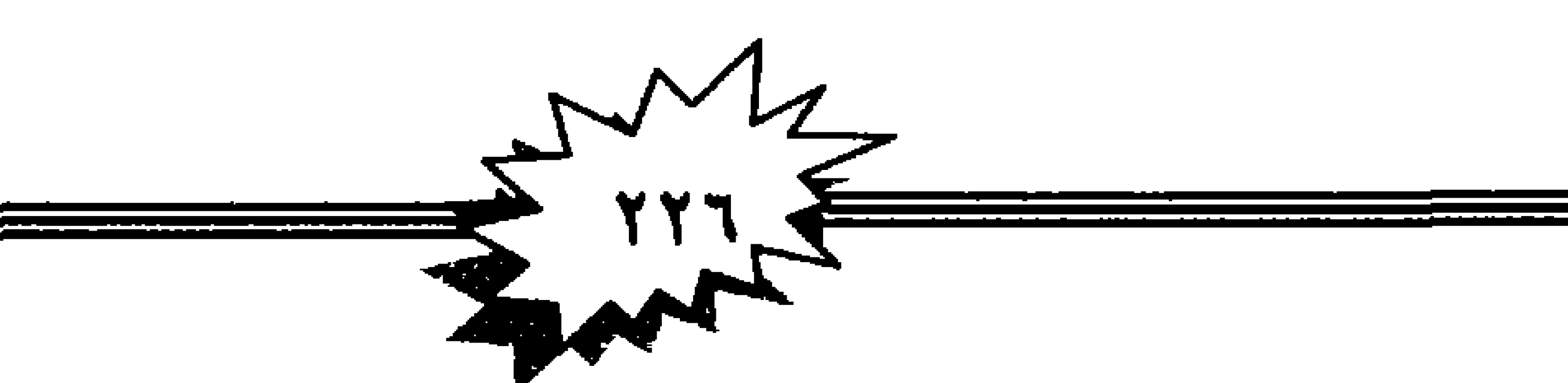
هـ) أخيراً نفرض أن $\omega \in$ س تبديل يحتوي دورات ثنائية فقط، وبما أن ن > ٤ فإن

ω = (أ١ أ٢) (ب١ ب٢) λ. حيث أن λ لا تعتمد على أ١، أ٢، ب١، ب٢

ليكن جـ عنصراً آخر يختلف عن أ١، أ٢، ب١، ب٢ فمن الواضح أن σ = (أ٢، ب١، ب٢) δ = أ١ ب٢ جـ) تبديلان في $ز_ن$.

بما أن س $\geq ز_ن$، فإن س تحتوي التباديل ω_1، ω_2، ω_3، ω_4 حيث أن

$\omega_1 = \sigma^{-1}\omega\sigma$ = (أ١ ب١) (ب٢ أ٢) λ.



$\omega_{٢} = \omega_{١}\omega^{-١}$ = (أ١ ب١) (ب٢ أ٢) (أ١ أ٢) (ب١ ب٢)

= (أ١ ب٢) (أ٢ ب١)

$\omega_{٣} = \delta^{-١}\,\omega_{٢}\,\delta$ = (ب٢ جـ) (أ٢ ب١) $\omega_{٤} = \omega_{٣}\,\omega_{٢}^{-١}$ = (ب٢ جـ)

(أ٢ ب١) (أ١ ب٢) (أ٢ ب١) = (أ١ ب٢ جـ)

من الواضح أن $\omega_{٤}$ تبديل يحتوي على دورة بطول ٣ فإن س = زتن ≠ ٠

(٢٠-٢-٢) مبرهنة: عندما ن ≥ ٥ فإن زتن هي الزمرة الجزئية السويّة غير التافهة الوحيدة في الزمرة المتناظرة زظن.

البرهان: نفرض أن هـ ⊴ زظن حيث |هـ| > ١ سنبرهن أولاً أن |هـ| ≠ ٢ نفرض أن

هـ = { α، $\alpha^{٢}$ = ١}. إذاً α تبديل ثنائي أو حاصل ضرب دورات ثنائية.

في الحالة الأول نفرض أن α = (أ ب) بما أن ن ≥ ٥. إذن يوجد عنصر جـ يختلف عن أ،ب حيث يكون β = (أ جـ) تبديلاً في زظن.

بما أن هـ ⊴زظن فإن هـ تحتوي التبديل $\beta^{-١}\,\alpha\,\beta$= (أ جـ)$^{-١}$ (أ ب) (أ جـ) = (ب جـ) ≠ α هذا يعني أن |هـ| ≠ ٢

في الحالة الثانية نفرض أن α = (أ١ أ٢) (ب١ ب٢) λ. حيث λ لا تعتمد على أ١، أ٢، ب١، ب٢. التبديل σ = (أ٢ ب١ ب٢) هو أحد تباديل الزمرة زظن، بما أن هـ ⊴ زظن فإن هـ تحتوي على التبديل.

$\sigma^{-١}\,\alpha\,\sigma$ = (أ٢ ب٢ ب١) (أ١ أ٢) (ب١ ب٢) λ (أ٢ ب١ ب٢)

= (أ٢ ب٢) (أ١ ب١) $\lambda \neq \alpha$.



هذا يعني كما في الحالة الأولى أن $|هـ| \neq ٢$، لذا $|هـ| > ٢$.

بما أن زمرة التباديل الزوجية D = هـ ∩ $ز_{ت_ن}$ في الزمرة هـ تكون زمرة جزئية سويّة بحيث أن $[هـ : D] = ٢$ أو $[هـ : D] = ١$ فإن $D \trianglerighteq ز_{ت_ن}$ كما أن $|D| > ١$.

بما أن $ت_{ز_ن}$ زمرة بسيطة، فإن $D = ز_{ت_ن}$ هذا يعني أن $ز_{ت_ن} \leq$ هـ ولكن هـ $\not\geq ز_{ت_ن}$ فإن $|هـ| \geq \frac{١}{٢}$ ن ! وإن $|هـ| = |ز_{ت_ن}|$ وهذا يعني أن $ز_{ت_ن}$ = هـ لكون $ز_{ت_ن} \leq$ هـ.

(٢-٢-٢١) تعريف: الزمرة المتعدية (Transitive Group)

لتكن ز زمرة تباديل على X، إذا وجد لكل عنصرين ٲ، ب ∈X، تبديل ع∈ز بحيث أن $ٲ^ع$=ب فإن ز تسمى زمرة متعدية.

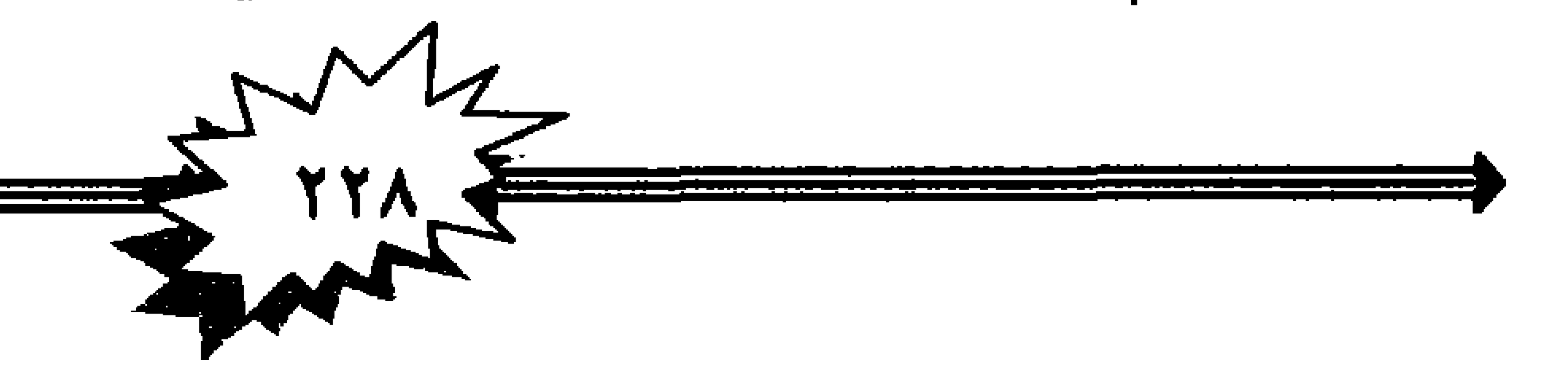
من الواضح أنه إذا كانت ز زمرة تباديل متعدية على X فإن $ٲ^ز$ = {$ٲ^ع$: ع ∈ ز} = X لأي عنصر ٲ ∈ X.

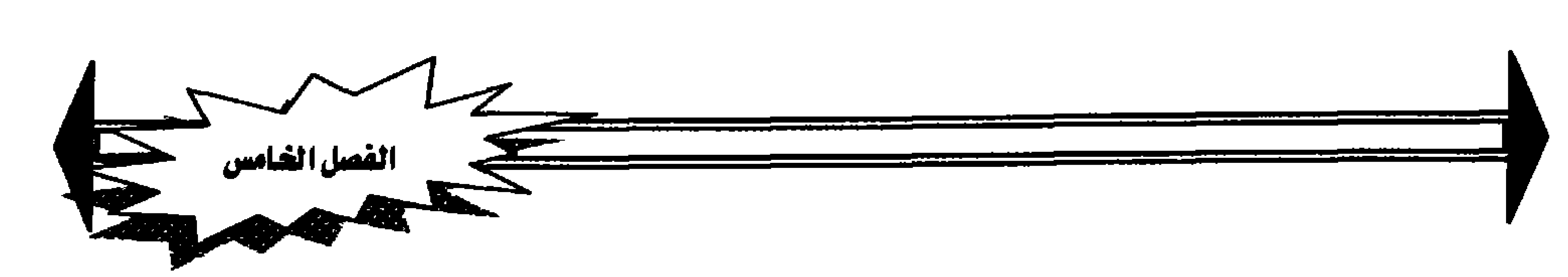
كذلك إذا كانت $ٲ^ع$ = X حيث أن ٲ ∈ X فإن ز زمرة متعدية.

(٢-٢-٢٢) تعريف:

لتكن أ ≤ X حيث أن ز = $ز_{ظ_ن}$ الزمرة المتناظرة على X. مجموعة التباديل في ز التي تثبت كل عنصر من عناصر المجموعة أ تكون زمرة (للطالب أن يتحقق من ذلك). هذه الزمرة تسمى الزمرة المثبتة لعناصر المجموعة أ (Pointuise slabilizer) ويرمز لها بالرمز $ز_{[أ]}$ أي أن:

$ز_{[أ]}$ = {ع ز : $ٲ^ع$ = ٲ، ∀ ٲ ∈ أ} أما زمرة التباديل في ز = $ز_{ظ_ن}$ التي تثبت أ كمجم∈وعة فيرمز لها بالرمز $ز_{[أ]}$ وفي هذه الحالة فإن $ز_{(أ)}$ = {ع ∈ ز :





$\alpha^{ع} \ni$ أ، $\forall$ أ $\in$ أ} تسمى هذه الزمرة ز(أ)، بالزمرة المثبتة للمجموعة أ (Setuise stabilizer).

عندما {أ} = أ فإننا نكتب زأ بدلاً من ز[أ].

مثال٢٧: في الزمرة المتناظرة ز ط٤ نلاحظ أن:

ز [١، ٢] = { I، (٣ ٤)}.

ز (١، ٢) = { I، (٣ ٤)، (١ ٢)، (١ ٢)، (٣ ٤)}.

ز٢ = { I، (٣ ٤)، (١ ٤)، (١ ٣)، (١ ٣ ٤)}.

نلاحظ أيضاً بأنه في الزمرة الأولى والثانية لا يوجد تبديل ع بحيث أن $١^{ع}$ = ٣، بينما في الزمرة الثالثة لا يوجد تبديل ع بحيث أن $١^{ع}$ = ٢ بعبارة أخرى أ^{ز} $\neq X$.

لكل العناصر أ في الزمر الثلاث أعلاه، أي أنها ليست متعدية للطالب أن يتحقق من أن الزمرة المتناظرة ز ط٤ زمرة متعدية.

(٢٣-٢-٢) مبرهنة: | ز | = | ز α || $ز_{\alpha}$ |

البرهان: سنبرهن ذلك من خلال حساب | $\alpha_{ز}$ | بما أن:

$\alpha^{ع} = \alpha^{هـ} \Leftrightarrow \alpha^{ع هـ^{-1}} = \alpha \Leftrightarrow$ ع هـ$^{-1}$ $\in$ زأ $\Leftrightarrow$ ع $\in$ زأ هـ.

فإن عدد عناصر $\alpha^{ز}$ هو نفس عدد المجموعات المشاركة اليمنى زα هـ في ز أي:

$$|\alpha_{ز}| = [ز : ز_{\alpha}] = \frac{|ز|}{|ز_{\alpha}|} \neq ٠$$



(٢٤-٢-٢) نتيجة: [ز : ز$_{\alpha:\beta}$] = | $\alpha_{ز}$ | | $\beta^{ز_\alpha}$ |

البرهـــان: بمـــا أن: | ز | = | $\alpha_{ز}$ | | ز$_\alpha$ | = | $\alpha_{ز}$ | | $\beta^{ز_\alpha}$ | | ز$_{[\alpha،\beta]}$ | فـــإن [ز : ز$_{[\alpha:\beta]}$] =| $\alpha_{ز}$ | | $\beta^{ز_\alpha}$ | ≠ ٠.

(٢٥-٢-٢) تعريف: زمـرة التباديـل ز علـى × تـسمى زمـرة ثنائيـة التعـدي (٢-transitive) إذا كـان لكـل زوج مـن المجموعـات المرتبـة {ﻫ_1 ﻫ_2} {ب$_1$، ب$_2$} يوجد تبديل ع∋ز بحيث أن $\text{ﻫ}_1^{ع}$=ب$_1$، $\text{ﻫ}_2^{ع}$=ب$_2$

يمكننا تعميم التعريف إلى زمرة ثلاثية التعـديل أو رباعيـة التعـدي أو .... حيـث تكـون المجموعـات المرتبـة في هـذه الحالـة { ب$_1$، ب$_2$،.......ب$_ن$}، {ﻫ_1، ﻫ_2......$\text{ﻫ}_ن$} ويكون هناك تبديل ع∋ز بحيث أن:

$\text{ﻫ}_i^{ع}$ = ب$_i$. حيث أن i = ١، ٢،........ن

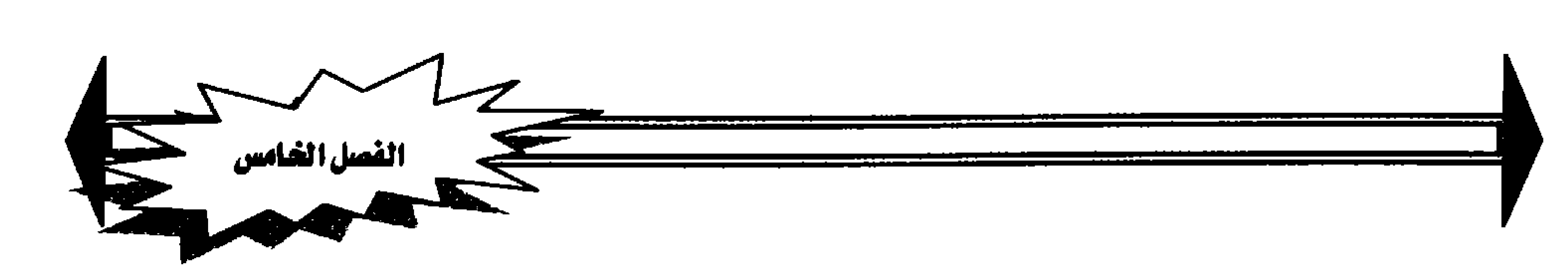
طبعاً ن = ٣ عندما تكون الزمـرة ثلاثيـة التعـدي و ن = ٤ عنـدما تكـون الزمرة رباعية التعدي وهكذا من الواضح أنه إذا كانت ز زمرة ثنائية التعدي فإن ز$_{\text{ﻫ}}$ زمرة متعديـة، كمـا أن | ز | = ن | ز$_{\text{ﻫ}}$| = ن (ن-١) | ز$_{[\text{ﻫ}،ب]}$| حيـث أن ن = | X |؛ ﻫ، ب ∋ X.

(٢٦-٢-٢) **مبرهنة كايلي (Cayley Theorem)**

كل زمرة منتهية التشاكل تقابلياً مع زمرة تباديل.

البرهان:

لتكن ز = {ﻫ_1، ﻫ_2،.......$\text{ﻫ}_ن$} زمرة منتهية رتبتها ن، إذا كانت س* ∋ ز فإن ز$_{س*}$ = {ﻫ_1س*، ﻫ_2س*،........... $\text{ﻫ}_ن$س*} = ز لكـون ز مغلقـة بالنـسبة



للعملية الثنائية نعرف الدالة هـ لكل عنصر س* ∋ز كما يلي:

$$هـ : س^* \longrightarrow \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 س^* & أ_2 س^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* \end{pmatrix}$$

أي أن هـ (س*) =

$$\begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 س^* & أ_2 س^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* \end{pmatrix}$$

كذلك عندما ص* ∋ز فإن:

$$هـ (ص^*) = \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 ص^* & أ_2 ص^* & \cdots\cdots & أ_ن ص^* \end{pmatrix}$$

لذا فإن:

$$هـ (س^* ص^*) = \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 س^* ص^* & أ_2 س^* ص^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* ص^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 س^* & أ_2 س^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ_1 س^* & أ_2 س^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* \\ (أ_1 س^*) ص^* & (أ_2 س^*) ص^* & \cdots\cdots & (أ_ن س^*) ص^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 س^* & أ_2 س^* & \cdots\cdots & أ_ن س^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ_1 & أ_2 & \cdots\cdots & أ_ن \\ أ_1 ص^* & أ_2 ص^* & \cdots\cdots & أ_ن ص^* \end{pmatrix} = هـ (س^*) هـ (ص^*)$$

وعليه فإن الزمرة المنتهية ز متشاكلة تقابلياً مع زمرة تباديل لكون الدالة هـ متباينة أيضاً (ونترك تحقيق ذلك للطالب) #



تمارين

١- برهن أن $ز_{ظ_ن}$ تولد بالتباديل (١ ٢)، (٢ ٣)،..........((ن-١)ن)

٢- برهن أن $ز_{ظ_ن}$ تولد بالتباديل α = (١ ٢) β = (١ ٢ ٣....ن)

٣- إذا كانت ز = $ز_{ظ_ن}$، $\alpha \in$ ز حيث أن α = ($أ_١$ $أ_٢$...............$أ_ن$)
فبرهن أن $م_ز(\alpha) = \{ \alpha، \alpha^٢، ....، \alpha^{ن-١}، \alpha^ن = I \}$.

٤- برهن أنه عندما ن $\leq$ ٣ فإن مركز $ز_{ظ_ن}$ يحتوي على العنصر المحايد فقط.

٥- برهن أن مركز الرموز ز هو زمرة جزئية سوية في ز.

٦- برهن أن $ز_{ت_ن}$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة في $ز_{ظ_٤}$ التي تكون رتبتها ١٢.

٧- برهن أن الزمرة الأبيلية تكون بسيطة إذا وفقط إذا كانت رتبتها عدداً أولياً.

٨- برهن عدم وجود زمرة بسيطة رتبتها ١٢.

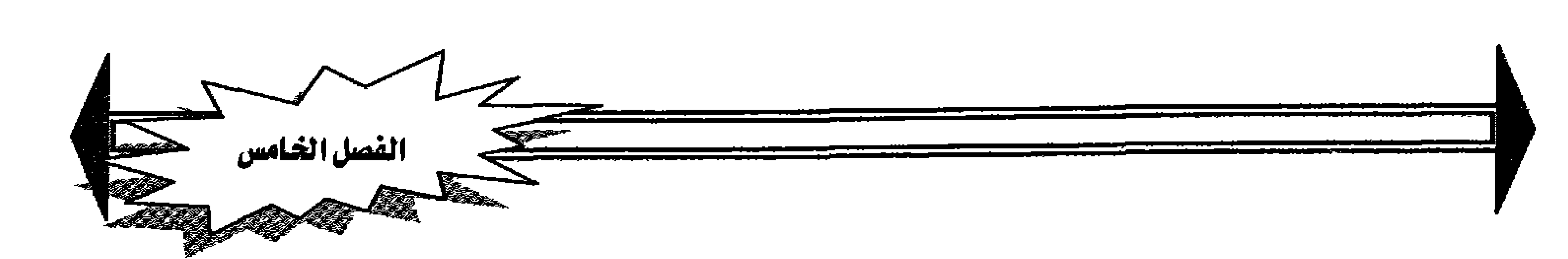
٩- برهن أنه عندما ن $\leq$ ٤ فإن مركز $ز_{ت_ن}$ يحتوي على العنصر المحايد فقط.

١٠- جد ممركز ومسوّي ع في $ز_{ظ_٤}$ حيث أن ع هو أحد التباديل التالية:

أ) ع = (١) (٢) (٣ ٤) جـ) ع = (١ ٢) (٣ ٤)

ب) ع = (١) (٢ ٣ ٤) د) ع = (١ ٢ ٣ ٤)

١١- جد الزمر الجزئية غير الدائرية في كل من $ز_{ت_٤}$، $ز_{ظ_٣}$، $D_٦$ ثم بين أياً منها متعدية.



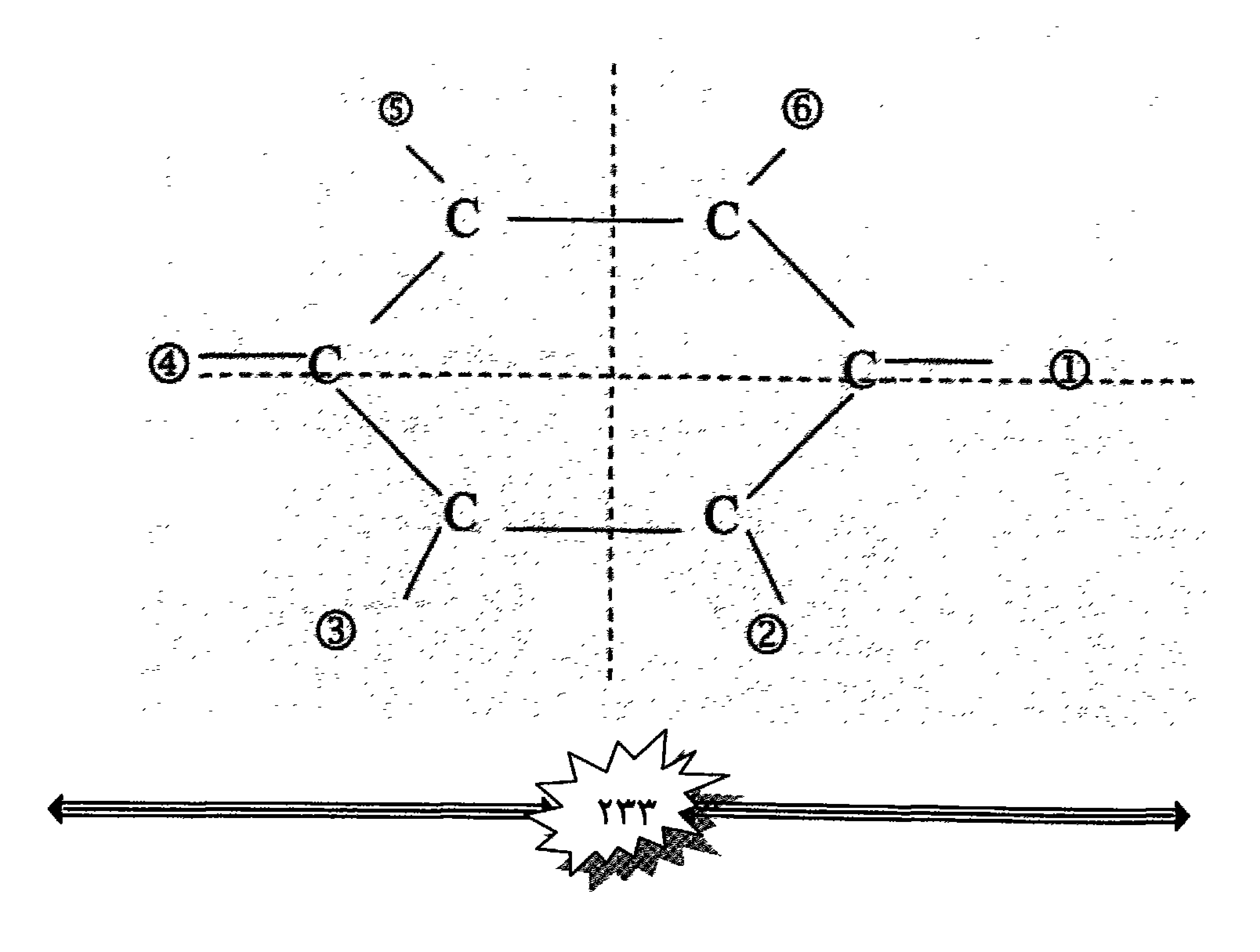
١٢- جد الزمر الجزئية $ز_{[١]}$، $ز_{[١، ٢]}$ و $ز_{[١، ٢]}$ عندما تكون

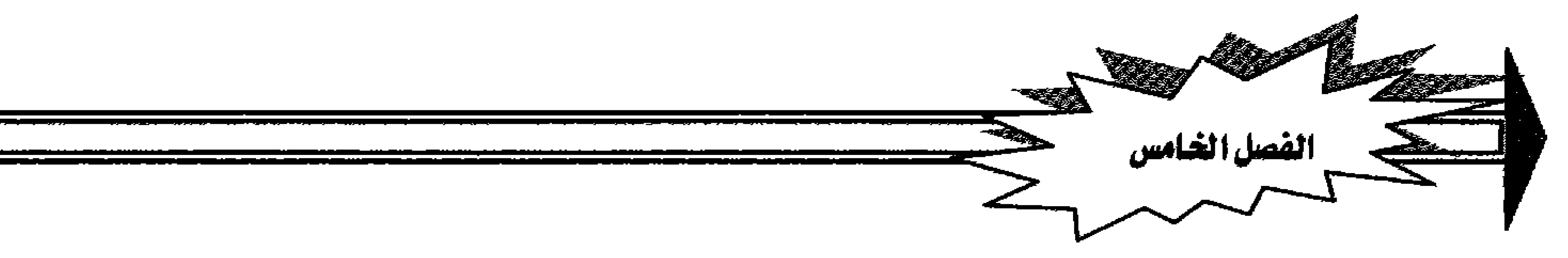
أ) $ز = ز_{ظ٤}$

ب) $ز = ز_{ظ٥}$

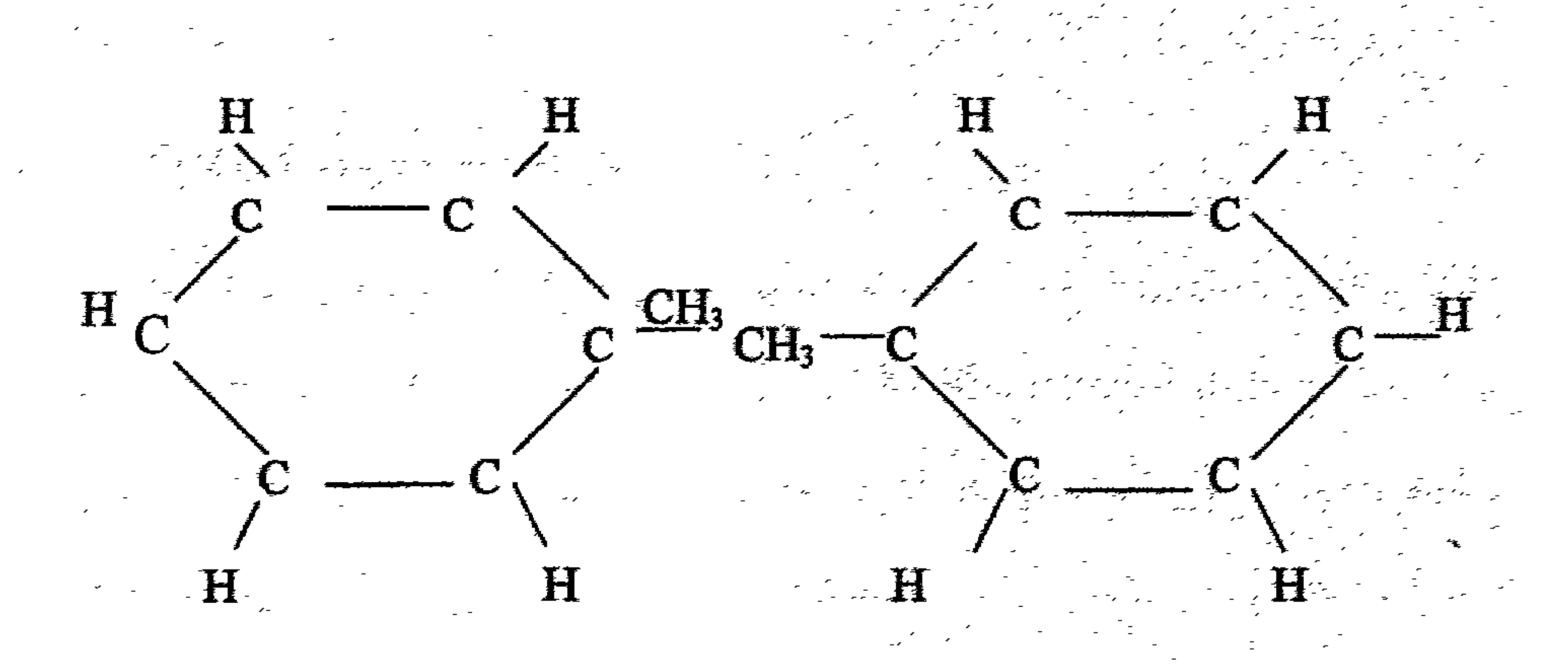
(٣-٢) بعض تطبيقات نظرية الزمر:

إذا كانت ز زمرة تباديل على المجموعة X، ن = | X | فإن طريقة بوليا – برنسايد في التعداد (polya – Burnside Method of Enumeration) تمكننا من حساب عدد المدارات التي ستتجزء إليها المجموعة X تحت تأثير ز، هذه العملية مهمة جداً، في الكثير من الحالات، ففي الكيمياء مثلاً لو سئلنا عن عدد أنواع المركبات الكيماوية التي يمكن الحصول عليها من خلال ارتباط ذرة الكربون في حلقة بتزن (penzene Ring) مع ذرة الهيدروجين H أو الجزئية CH_3 كما موضحة في الشكل:





فإن هناك ٢ [٦] احتمالاً لتوزيع H أو CH_3 في الأماكن المرقمة في الشكل أعلاه، ولكنها ليست جميعاً مختلفة إذ أن هناك حالات متكافئة، أي تعطي نفس المركب فمثلاً التوزيعان أدناه يمثلان المركب نفسه.

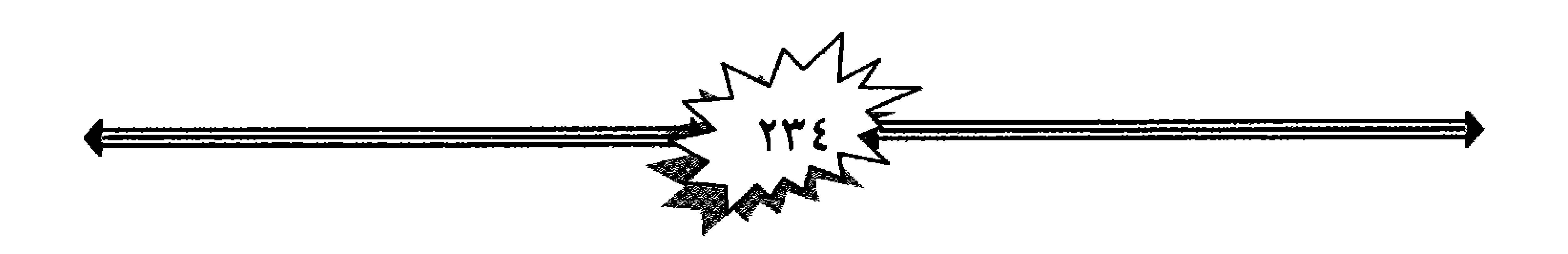


إذ أن أياً منهما يكون نفسه الآخر ولكن بعد تدويره بزاوية قدرها ١٨٠° (Rolation) أو انعكاسه (Reflection).

وبشكل أوضح، هناك مثلاً ست حالات توزع فيها جزئية واحدة CH_3 وخمسة ذرات H ولكنها جميعاً تعطي المركب نفسه لكون عملية التدوير والانعكاس لا تغير من نوع المركب الكيماوي.

الزمرة D_6 تعمل كزمرة تباديل على X؛ X= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} كما أنها في الوقت نفسه تعمل على مجموعة المركبات الكيماوية S^1_1 البالغة ٢ [٦] مركباً والتي تمثل جميع احتمالات توزيع ذرات الهيدروجين وجزيئات الإيثان.

ومن الطبيعي أن عمل D_6 على المجموعة S^1_1 سينتج مدارات تتجزأ إليها المجموعة S^1_1، وأن عدد هذه المرات هو عدد المركبات الكيماوية المتمايزة.



مثال (٢٨): التبديل

ع∈ D٦ حيث أن ع = (١) (٤) (٢ ٦) (٣ ٥) يعمل على المجموعة S^1_1 كما يلي:



أي أن ع يقوم بتجميع المركبات المتكافئة في مدار واحد، وهكذا بقية التباديل وبالتالي فإن تباديل D_6 ستجزئ المجموعة $S^1{}_1$ إلى مدارات، كل مدار فيها يحتوي على المركبات الكيماوية المتكافئة.

نفرض حساب عدد هذه المدارات في هذه الحالة وفي حالات أخرى كثيرة سنحتاج مبرهنة برنسايد التي برهنها سنة ١٩١١ ولكن استخداماتها التطبيقية اكتشفت من قبل بوليا سنة ١٩٣٧.

(٢-٣-١) مبرهنة برنسايد (Burnside's Theorem):

لتكن ز زمرة تباديل على المجموعة X، ن = | X |.

لكل تبديل ع ∋ ز نعرف Fix (ع) كما يلي:

Fix (ع) = { س* ∋ X، س*^ع = س*}.

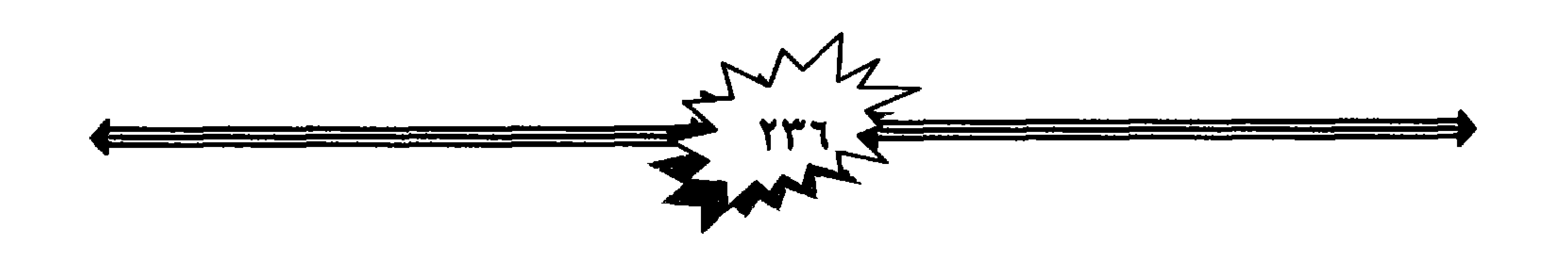
فإن عدد المدارات التي تتجزأ إليها المجموعة X تحت تأثير ز هو

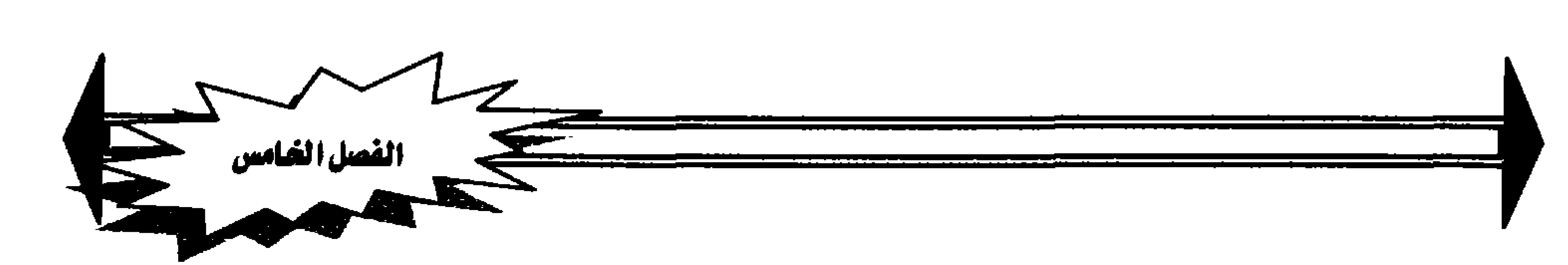
$$N_{\circ} = \frac{1}{|ز|} : \sum_{ع \in j} |Fix\ (ع)|$$

البرهان: تعد عناصر المجموعة $S^1{}_1$ = {(س*، ع): س*^ع = س*، س* ∋ X، ع ∈ ز} بطريقتين مختلفتين.

الجدول في أدناه يبين عناصر X التي تثبت تحت تأثير التبديل $ع_i$ ∋ ز كما أنه يبيّن تبديلات ز التي تثبت العنصر $س^*_j$ ∋ X حيث أن:

j=١، ٢، ....ن ، i = ١، ٢،............| ز |.





تمثل أعمدة الجدول بالعناصر س$^*_j$ ∈ X مصفوفة الأفقية بالتبادل ع$_i$ ∈ ز، كما أن عناصره الداخلية تمثل بالزوج (س$^*_j$ ، ع$_i$) وكما يلي:

	س$^*_١$ س$^*_٢$....... س$^*_j$ .... س$^*_ن$
ع$_١$	
ع$_٢$	
¦	Fix (ع$_i$) = ١١. ١
ع$_i$	
ع$_{\|ز\|}$	
	ز$_{س_j}$

حيث أنه إذا كانت س$^{*ع_i}_j$ = س$^*_j$ فإننا نضع ١ في مكان (س$^*_j$، ع$_i$) أما إذا كانت ز$_{س_j}$ ≠س$^*_j$ فإننا نضع ٠ في مكان (س$^*_j$، ع$_j$).

من الواضح أن مجموعة العناصر الداخلية للجدول في أي صف أفقي ع$_i$ مصفوفة يمثل عدد عناصر X التي تثبت تحت تأثير ع$_i$، أي أنه | Fix (ع$_i$) |.

كما أنه مجموع العناصر الداخلية للجدول في أي عمود س$^*_j$ يمثل عدد التباديل التي تثبت س$^*_j$ أي أنه | ز$_{س_j}$ |.

يمكن عدد العناصر في المجموعة $S^1{}_1$ إما عن طريق الصفوف الأفقية أو عن طريق الأعمدة، أي أن | $S^1{}_1$ | = $\sum_{ع \in ز}$ | Fix (ع) | = $\sum_{i=1}^{ن}$| ز$_{س_j}$ |

نختار مجموعة من العناصر س$^*_١$، س$^*_٢$، .... س$^*_N$. بحيث يكون كل واحد منها ينتمي إلى مدار من مدارات X تحت تأثير ز، أي ممثل واحد عن كل مدار، ومن الواضح أنه إذا كانت س* في نفس مدار س$^*_j$ فإن س^{*ز} = س$^{*ز}_j$





وهـذا ينـتج بـدوره $|\text{ز}_{\text{س}_\circ}| = |\text{ز}_{\text{س}_\text{ر}}|$ لكـون $|\text{ز}| = |\text{س}^{*\text{ر}}|\,|\text{ز}_{\text{س}_\circ}| = |\text{س}_\text{ر}^{*\text{ر}}|\,|\text{ز}_{\text{س}_\text{ر}}|$

$$\text{إذاً}\quad \sum_{j\in \text{ا}} |\text{Fix}\ (\text{ع})| = \sum_{j=1}^{N_\circ} \sum_{\text{س}\in\text{س}^\text{ر}} |\text{ز}_{\text{س}_\circ}|$$

$$\text{وهذا يعني أن} = \sum_{j=1}^{N_\circ} |\text{س}^{*}|_j^{i}\,|\text{ز}_{\text{س}_\text{ر}}| = N_\circ\,.\,|\text{ز}|.$$

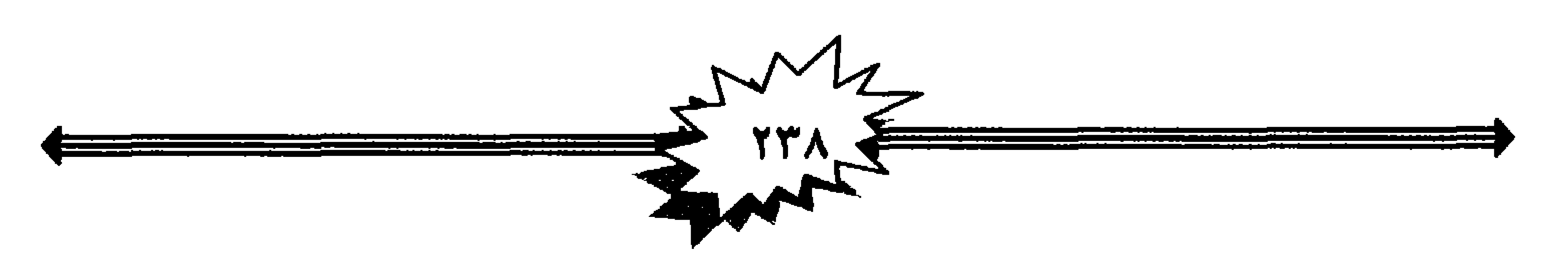
$$N_\circ = \frac{1}{|\text{ز}|}\,.\,\sum_{j\in \text{ع}} |\text{Fix}\ (\text{ع})| \neq 0$$

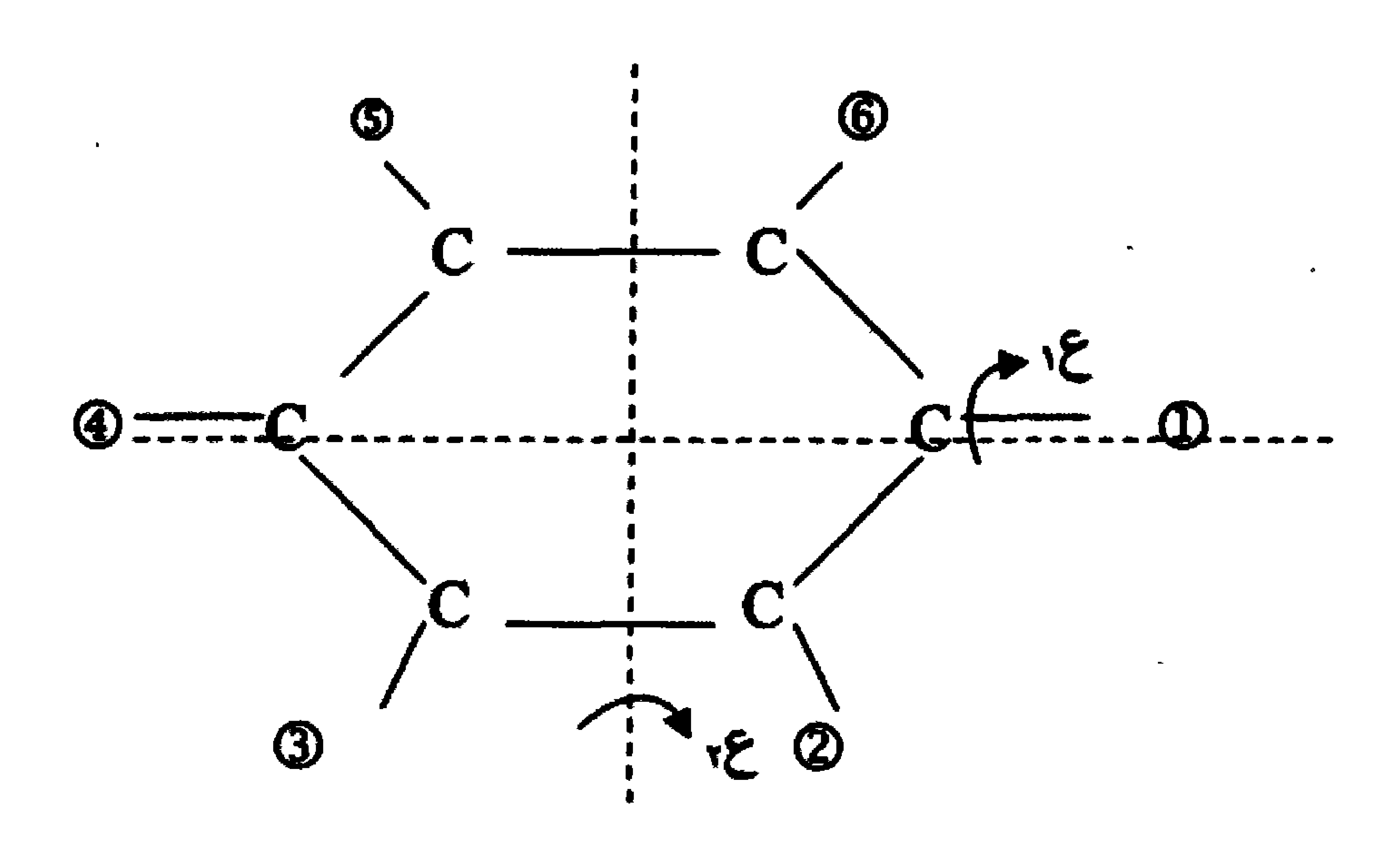
نعود إلى المركبات الكيماوية المتمايزة التي تنتج من ارتباط ذرة الهيدروجين H أو جزيء الإثيان CH_3 بحلقة بنزن فنقول بـأن عـدد احتمـالات توزيـع H أو CH_3 هو ٢^٦ = ٦٤.

ولكن بعض هـذه التوزيعـات تنـتج المركـب نفـسه إذ أن عـدد المركبـات الكيمياوية المتمايزة هو عدد مدارات الزمـرة D_6 علـى المجموعـة S^1_1 الـتي تمثـل المركبات الأربعة والستين الآنفة الذكر.

في زمرة التباديل D_6 نلاحظ أن العنصر المحايـد، أي التبـديل I = (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) يثبت جميع عناصر المجموعة S^1_1 والبالغ عددها ٦٤.

التبديل ع١ = (١) (٤) (٦٢) (٥٣) الذي يمثـل عمليـة الانعكـاس حـول المحور المار بالرأسـين ١ و ٤ هـو واحـد مـن ثلاثـة تباديـل أخـرى تمثـل عمليـة الانعكاس حول المحور المار بالرأسين ٢، ٥ والمحور المار بالرأسـين ٣ و ٦ إضـافة إلى ع١. كما أن رتبة هذه التباديل هي ٢. انظر الشكل.





ومن الواضح أن ع١ يثبت الرؤوس ٤ و ١ ويبدل الرأس ٢ بالرأس ٦ كما يبدل الرأس ٣ بالرأس ٥، هذا يعني أن ع١ يثبت الشكل في حالة كـون محتويـات الرأسين ٢ و ٣ هي نفس محتويات الرأسين ٦ و ٥ على التوالي. أي أن بإمكاننـا الاختيار في وضع H أو $CH_٣$ أو ٤ و ٢ و ٣ بينما ما سنضعه في الرأسـين ٥ و ٦ سيعتمد على ما وضعناه في ٣ و ٢ على التوالي. وهذا يعني أن التبديل ع١ يثبت ٢ ^٤^ = ١٦ عنصراً من عناصر المجموعة S^1_1 وبالتالي فإن هنـاك ٣ × ١٦ = ٤٨. عنصراً من عناصر S^1_1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ع١ في $D_٦$.

إن التبـــديل ع٢ = (٢ ٣) (١ ٤) (٥ ٦) في $D_٦$ الـــذي يمثـــل عمليـــة الانعكاس حول المحور المار ما بين الرأسين ٢ و٣ والمركز هـو واحـد مـن ثلاثـة تباديل تمثل عملية الانعكاس حول المحاور المارة ما بين الرأسين ١، ٢ والمركز وما



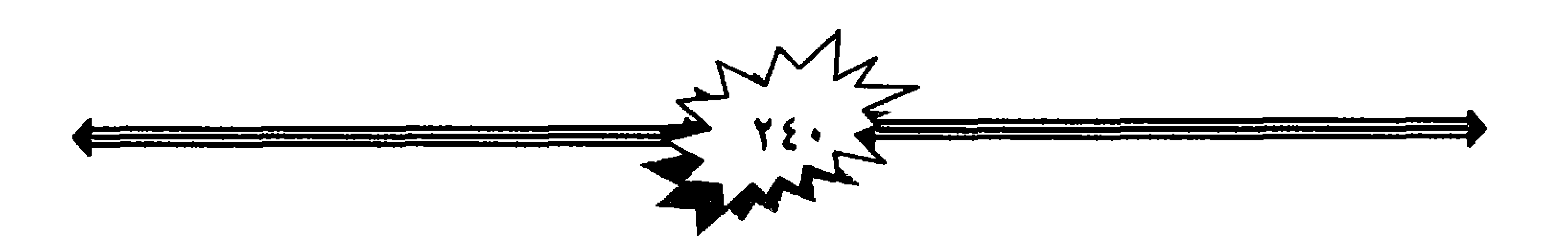
بين الرأسين ٦ و ١ والمركز إضافة إلى ع٢. كما أن رتبة هذا النمط من التباديل هي ٢.

ومن الواضح أن ع٢ يثبت أي عنصر من عناصر S^1_1 عندما تكون محتويات الرؤوس ٢، ١، ٦ نفس محتويات الرؤوس ٣، ٤، ٥ على التوالي، أي أن بإمكاننا الاختيار مواقع H أو CH_3 فقط في الرؤوس ٢، ١، ٦ إذ أن محتويات الرؤوس ٣، ٤، ٥ ستعتمد على الرؤوس الثلاثة الأولى وعلى التوالي. وهذا يعني أن هناك ٢ ^٣^ = ٨ من عناصر S^1_1 تثبت بواسطة التبديل ع٢، أي أن هناك ٣×٨= ٢٤ عنصراً من عناصر S^1_1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ع٢ في D_6.

إن تباديل D_6 التي بقيت الآن هي التي تمثل عملية الدوران بزاوية $\pm \frac{\pi}{٣}$ مثل

(١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦) وبزاوية $\pm \frac{٢\pi}{٣}$ مثل (١ ٣ ٥) (٢ ٤ ٦) وبزاوية π مثل (١ ٤) (٢ ٥) (٣ ٦).

وإن رتبة كل تبديل من هذه التباديل واضحة كما أن عملية عد عناصر S^1_1 التي تثبت تحت تأثير هذه التباديل البسيطة وتترك مناقشة ذلك للطالب حيث ستكون موضحة في الجدول الآتي الذي يعطي معلومات كاملة حول كل تبديل من تباديل D_6 ورتبها وعدد عناصر S^1_1 التي تثبتها.



العدد الكلي لعناصر S^1_1 التي تثبت تحت تأثير ع ر . |Fix (ع)|	| Fix (ع) |	عدد التباديل (ر)	الرتبة	مثال عن كل نوع من أنواع التباديل (ع)
٦٤	٦٤	١	١	(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦)
٤٨	١٦	٣	٢	(٢ ٦) (٣ ٠) (١) (٤)
٢٤	٨	٣	٢	(٥ ٦) (١ ٤) (٢ ٣)
٤	٢	٢	٦	(١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦)
٨	٤	٢	٣	(١ ٣ ٥) (٢ ٤ ٦)
٨	٨	١	٢	(١ ٤) (٢ ٥) (٣ ٦)
$\sum_{ع \in ج}$ | Fix | = ١٥٦		|D_1| = ١٢		

فإن عدد أنواع المركبات الكيماوية المتمايزة هو $N_\circ = \frac{١٥٦}{١٢} = ١٣$

(٢-٣-٢) دوال المفاتيح الكهربائية:

في الكهرباء، عدد الدوائر الكهربائية التي يمكن الحصول عليها من خلال ن من المفاتيح هو $٢^{٢^{ن}}$ هذا العدد يكبر بشكل هائل بازدياد ن فمثلاً عندما ن = ٢ هناك $٢^{٢^{٢}}$ = ١٦ دارة كهربائية وعندما ن = ٣ هناك $٢^{٢^{٣}}$ = ٢٥٦ من الدوائر الكهربائية.

أما عندما ن = ٤ فإن هناك $٢^{٢^{٤}}$ = ٦٥٥٣٦ من الدوائر الكهربائية.

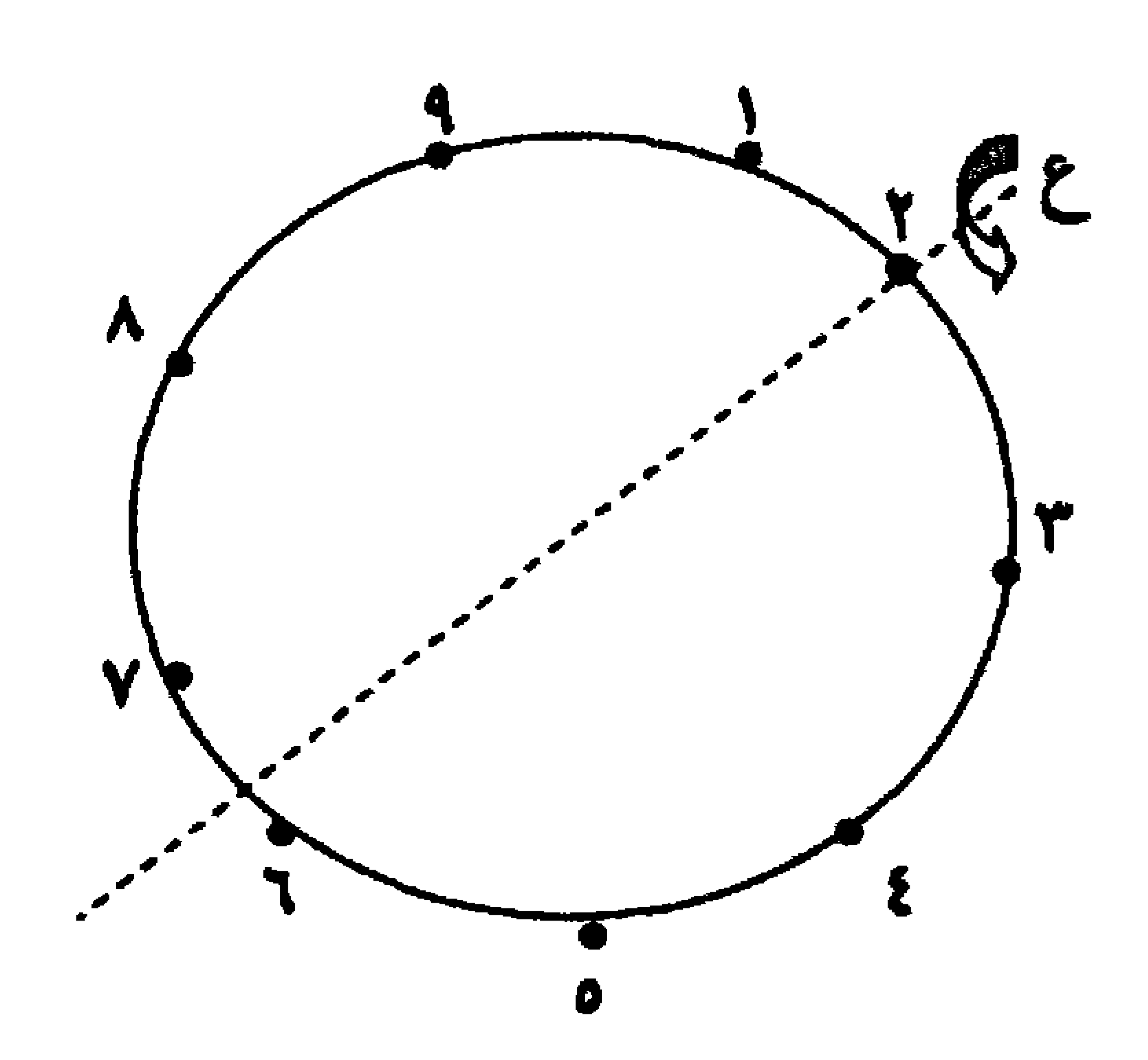
ولكن كما في الحالة السابقة، عند التعامل مع المركبات الكيماوية فإن هذه الدوائر الكهربائية ليست جميعاً متمايزة وإن زمرة التباديل التي تعمل على المفاتيح ستجزئ المجموعة S^1_1 إلى مدارات حيث أن S^1_1 تمثل مجموعة الدوائر الكهربائية لـ $٢^{٢^{ن}}$.

عدد المدارات هو عدد الدوائر لكهربائية المتمايزة، وفيما يأتي مثال آخر في تطبيقات مبرهنة برنسايد.

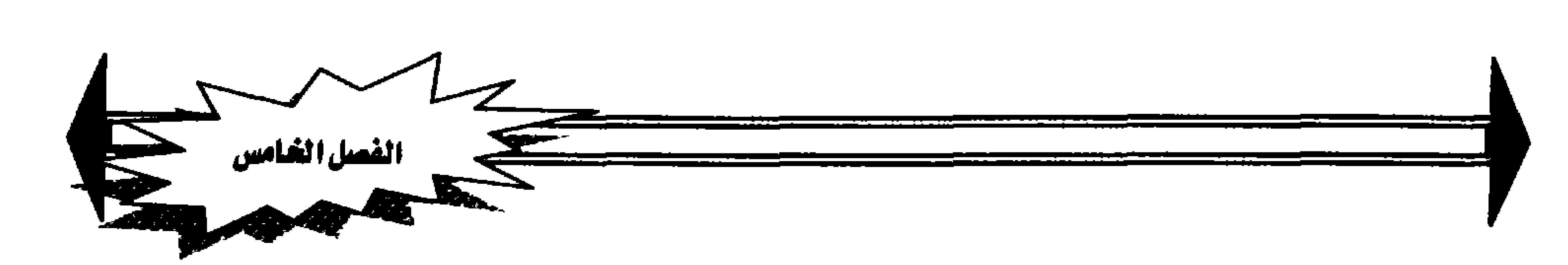
مثال ٢٩: تصنع قلادة من خيط حرير وتسعة أحجار ثمينة لها نفس المواصفات ما عدا اللون حيث أن ثلاثة منها سوداء والستة الباقية بيضاء.

ما عدد الأنواع المتمايزة من القلائد التي يمكن صنعها؟ آخذين بنظر الاعتبار أن عملية الدوران والانعكاس لا تغير في نوع القلادة.

الحل: من الواضح أن لدينا شكلاً تساعياً، أي ذا تسعة رؤوس وتسعة أضلاع وأن علينا توزيع الأحجار الثمينة التسعة على هذه الرؤوس كما هو موضح بالشكل.



بما أنه بإمكاننا اختيار ثلاثة من الرؤوس التسعة لتوزيع الأحجار الكريمة السوداء عليها، فإن مجموعة الأشكال المحتملة للقلائد، ${}_{1}S^{1}$، تحتوي على $\binom{٩}{٣} = \frac{٩!}{(٩-٣)!\,٣!}$ = ٨٤ شكلاً والتي ليست بالضرورة متمايزة إذ أن زمرة



التباديل D_9 التي تعمل على الرؤوس التسعة ستجزئ S^1_1 إلى مدارات. عدد هذه المدارات هو عدد القلائد المتمايزة التي يمكن صنعها.

بديهي أن العنصر الحايد في D_9 أي التبديل (١) (٢) (٣)....... (٩) يثبت جميع عناصر S^1_1 أي أنه يثبت ٨٤ عنصراً.

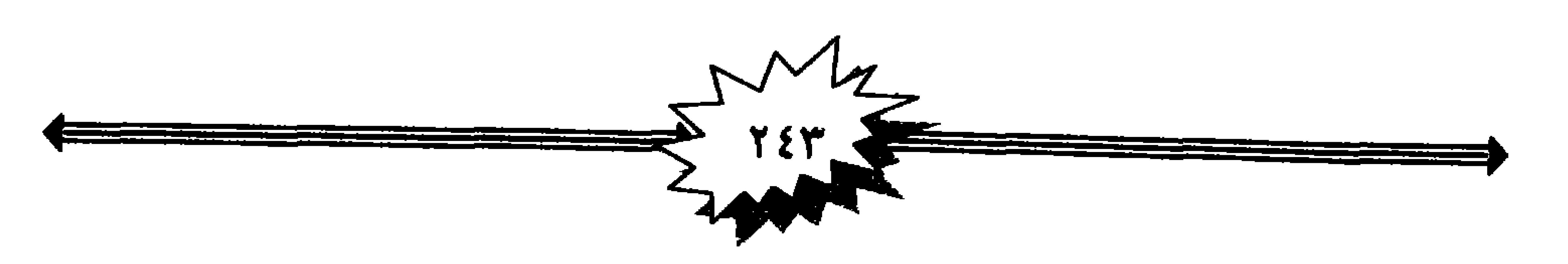
إن التبديل ع$_1$ = (٢) (١ ٣) (٤ ٩) (٥ ٨) (٦ ٧) الذي يمثل عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأس ٢ ومركز القلادة هو واحد من تسعة تباديل تمثل عملية الانعكاس حول المحاور التي تمر بأحد الرؤوس التسعة ومركز القلادة. رتبة كل من هذه التباديل هي ٢.

ومن الواضح أن ع$_1$ يثبت شكل القلادة في حالة توزيع الأحجار السوداء في أماكن الرؤوس { ١، ٢، ٣} و {٢ ، ٤، ٩} و { ٢، ٦، ٧} ، {٢ ، ٥، ٨} وذلك لكون ع$_1$ يثبت الرأس ٢ ويبدل الرؤوس ٣، ٤، ٥، ٦ بالرؤوس ١، ٩، ٨، ٧ على التوالي.

هذا يعني أن | Fix (ع$_1$) | = ٤

وبما أنه لا توجد سوى تسعة تباديل من هذا النوع، فإن هناك ٤× ٩ = ٣٦ عنصراً من عناصر S^1_1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ع$_1$ في D_9.

إن التبديل (١ ٧ ٤) (٢ ٨ ٥) (٣ ٩ ٦) = ع$_2$ الذي يمثل الدوران بزاوية $\frac{2\pi}{3}$ هو أحد تبديلين رتبة كل منهما ٣. الآخر هو ع$_2^2$ الذي





يمثل الدوران بزاوية $\frac{٤\pi}{٣}$، ومن الواضح أن ع$_{٢}$ يثبت شكل القلادة في حالة توزيع الأحجار السوداء في أماكن الرؤوس

{ ١، ٧، ٤} و {٢ ، ٨، ٥} و { ٣، ٩، ٦}. هذا يعني أن

| Fix ع$_{٢}$ | = ٣

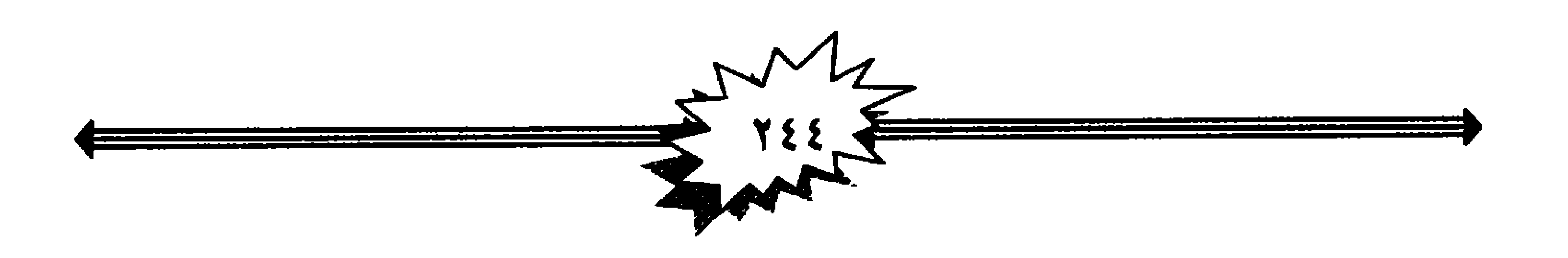
إذاً هناك ٢ × ٣ = ٦ من عناصر $S^1{}_1$ تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ع$_{٢}$ في D$_{٩}$. التبديل (١ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢) = ع$_{٣}$ رتبته ٩ ويمثل الدوران بزاوية ٤٩^{o} هو واحد من ستة تباديل هي ع$_{٣}$، ع$_{٣}^{٢}$، ع$_{٣}^{٤}$، ع$_{3}^{5}$، ع$_{٣}^{٧}$، ع$_{٣}^{٨}$ والتي تثبت عنصراً من عناصر $S^1{}_1$ في حالة كون جميع الأحجار لها نفس اللون. هذا يعني أن | Fix ع$_{٣}$ | = ٠

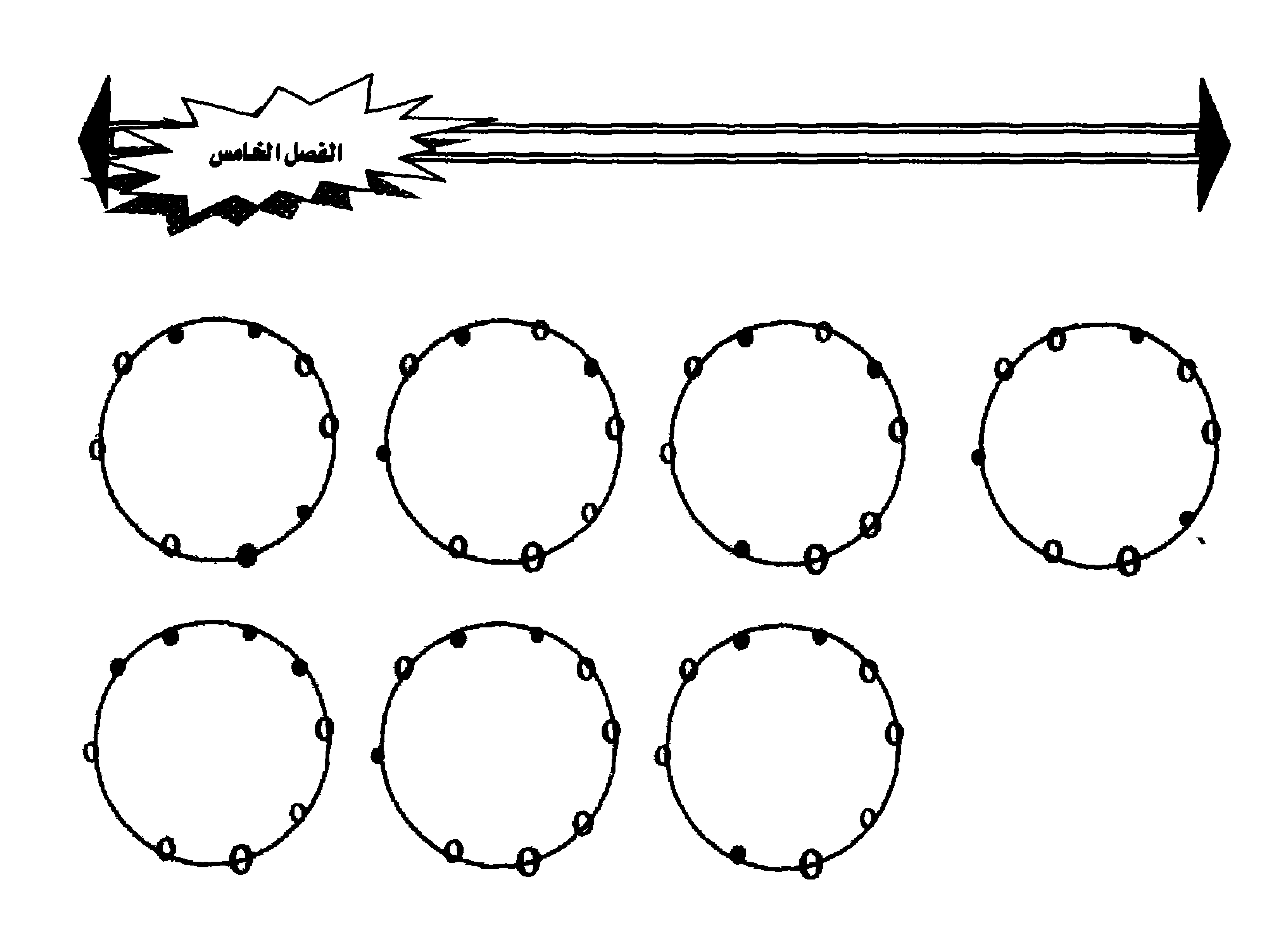
نجعل ما تقدم من معلومات بالجدول التالي:

ر . |Fix (ع)|	|Fix (ع)|	عدد التباديل ر	الرتبة	ممثل من كل نوع من أنواع التباديل (ع)
٨٤	٨٤	١	١	(١) (٢) (٣) .... (٩)
٣٦	٤	٩	٢	(٢) (١ ٣) (٤ ٩) (٥ ٨) (٦ ٧)
٦	٣	٢	٣	(١ ٧ ٤) (٢ ٨ ٥) (٣ ٩ ٦)
٠	٠	٦	٩	(١ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢)
$\sum_{j\in G}$ |Fix (ع)| = ١٢٦		|D$_{٩}$| = ١٨		

إذاً عدد أنواع القلائد المتمايزة التي يمكن عملها هو N$_{\circ}$ = $\frac{١٢٦}{١٨}$ = ٧

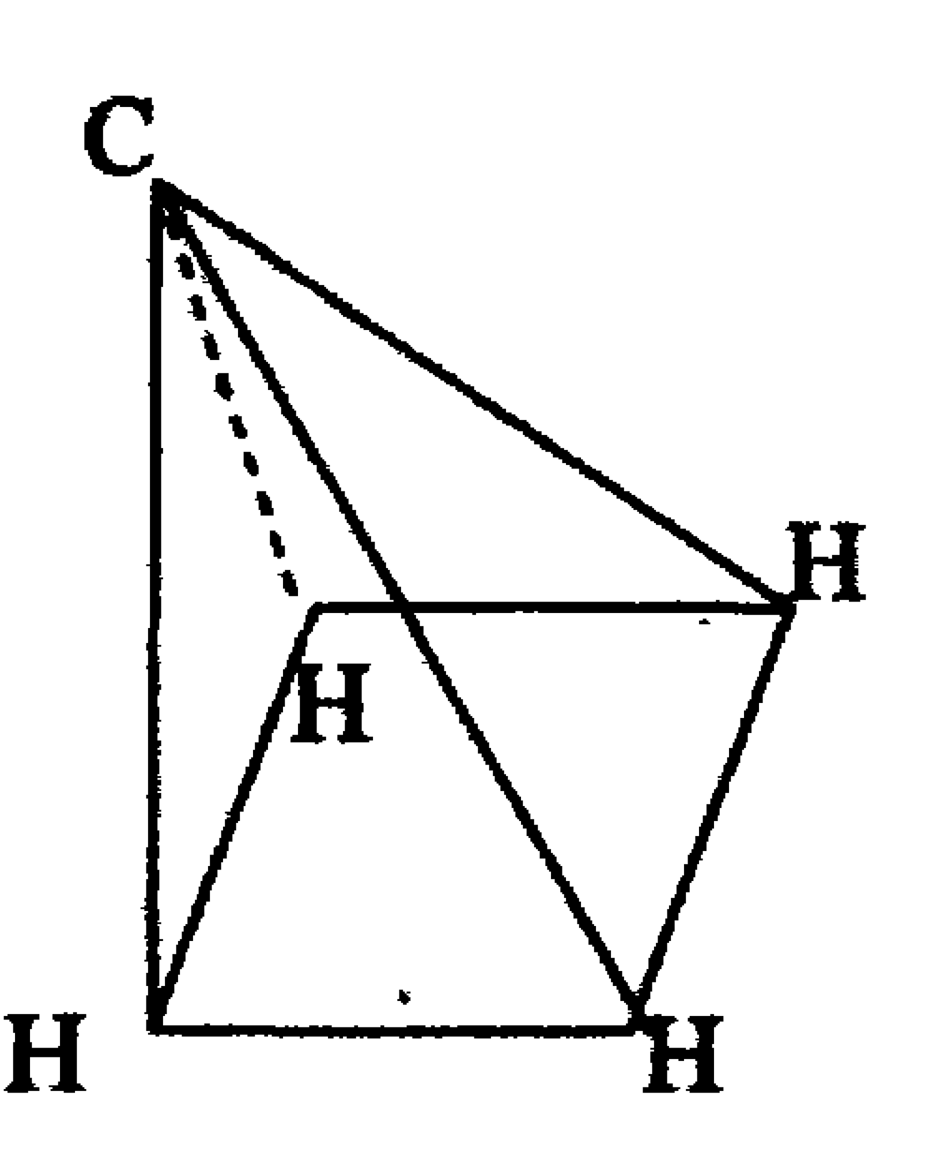
وهي:



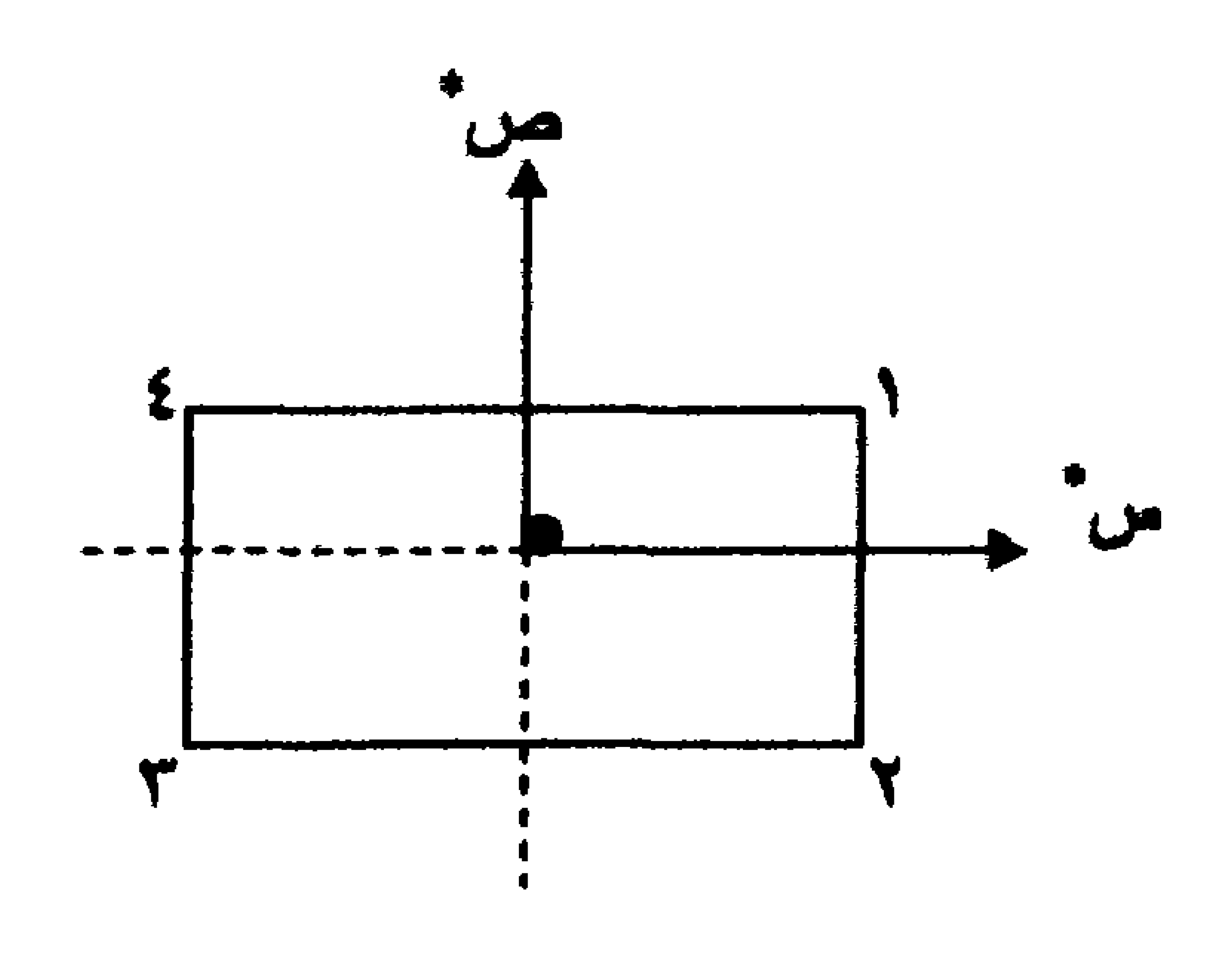


(٣-٣-٢) التذبذب الجزيئي (Moleculor vibration):

لنظرية الزمر استخدامات مهمة في دراسة تذبذب الجزيئات وتحليل الأنماط الطبيعية (Normal Modes) لهذه الجزئيات. في سنة ١٩٥٩ قام العالم ويكنر (Wigner) بتحليل الأنماط الطبيعية لجزئية الميثان CH_4. ويمكن استخدام طريقة ويكنر في التحليل لدراسة وتحليل أنه جزئية من هذا النوع، وأن عملية تذبذب جزئية الميثان CH_4 في الشكل (١) والموضحة في الشكل (٢) تعرف زمرة رتبتها ٨. وتتكون عناصر هذه الزمرة من التباديل التالية:



الشكل (١)

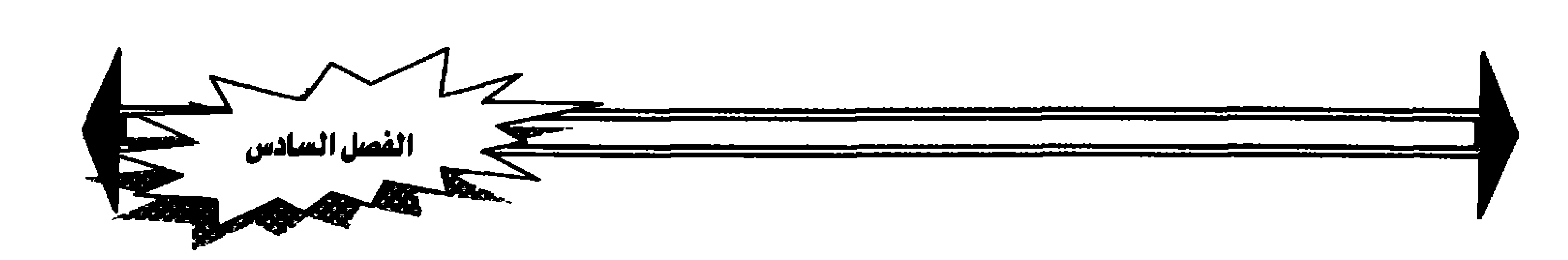


الشكل (٢)

(١) (٢) (٣) (٤)	العنصر المحايد الذي ثبت كل ذرات الهيدروجين
(١) (٣) (٢ ٤)	عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين ١، ٣
(١ ٣) (٢) (٤)	عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين ٤، ٢
(١ ٢) (٣ ٤)	عملية الانعكاس حول المحور س*
(١ ٤) (٢ ٣)	عملية الانعكاس حول المحور ص*
(١ ٢ ٣ ٤)	عملية الدوران بزاوية ٩٠° في المستوى س* ص*



العلاقات



الفصل السادس

العلاقات

٣ . ١ حاصل الضرب الكارتيزي (الجداء الديكارتي)

Cartesian product:

تعريف ٣-١-١:

الزوج المرتب (order pair) (س، ص) هو كائن رياضي مكوّن من العنصرين س، ص مأخوذين على الترتيب س ثم ص، يسمى س العنصر الأول أو المركبة الأولى أو المسقط الأول للزوج المرتب، ويسمى ص العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني للزوج المرتب.

من التعريف السابق نستطيع بسهولة ملاحظة أن: ١) س $\neq$ ص $\Leftrightarrow$ (س، ص) $\neq$ (ص، س)

٢) (س$_1$، ص$_1$) = (س$_2$، ص$_2$) $\Leftrightarrow$ س$_1$ = س$_2$ $\wedge$ ص$_1$ = ص$_2$

٣) (س$_1$، ص$_1$) $\neq$ (س$_2$، ص$_2$) $\Leftrightarrow$ س$_1$ $\neq$ س$_2$ $\vee$ ص$_1$ $\neq$ ص$_2$

تعريف ٣-١-٢:

حاصل الضرب الديكارتي أو الجداء الديكارتي للمجموعتين أ و ب والذي نرمز له بالرمز أ× ب هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى





عنصر في أ والمركبة الثانية عنصر في ب، أي أن:

أ × ب = {(س، ص) : س ∋ أ ∧ ص ∋ ب}

عندما نستعمل مصطلح الجداء الديكارتي فمن المفهوم أن المجموعات المتضمنة غير خالية حتى وإن لم يذكر ذلك صراحة.

مثال ٣-١-١:

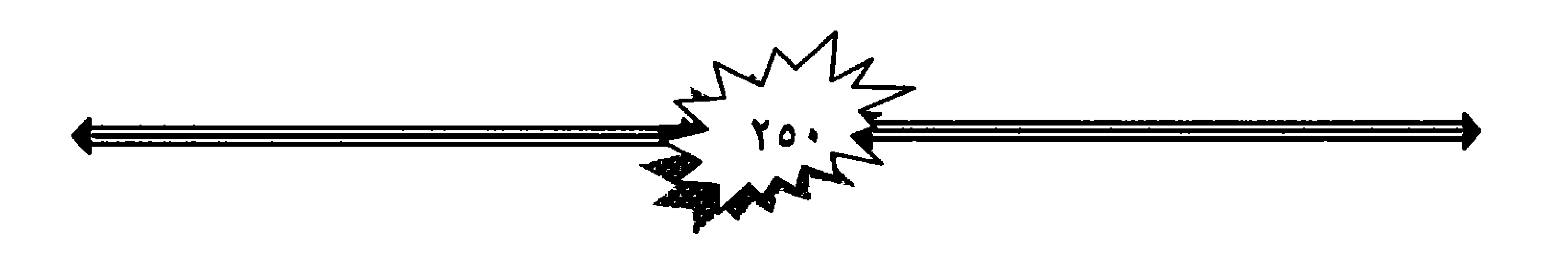
بفرض أن أ = {١، ٢، ٣}   ب = {س، ص} فإن

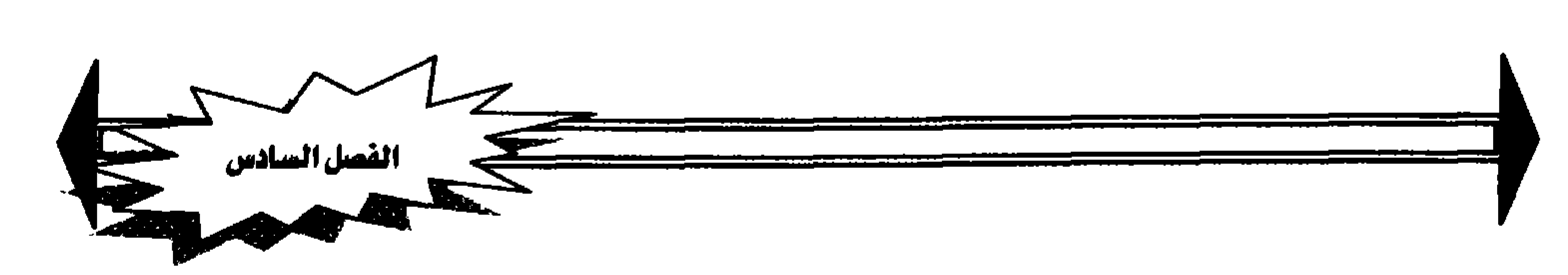
أ × ب = {(١، س)، (١، ص)، (٢، س)، (٢، ص)، (٣، س)، (٣، ص)}

ب × أ = {(س، ١)، (س، ٢)، (س، ٣)، (ص، ١)، (ص، ١)، (ص، ٣)} واضح أن العملية ليست تبديلية حيث أ × ب ≠ ب × أ

ملحوظة: إذا كان عدد عناصر المجموعة أ يساوي م، وعدد عناصر المجموعة ب يساوي ن فإن عدد عناصر المجموعة أ × ب يساوي م . ن

يمكن بناء جدول الانتماء للجداء الديكارتي، ولكن يجب أن نفهم أن المقارنة بين المجموعات يجب أن تكون على أساس قيم الانتماء للعنصر نفسه، فمثلاً تطابق قيم الانتماء المتناظرة للمجموعتين أ × ب و ب×أ لا يعني التساوي حيث إن قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة أ ×ب هي نسبة لانتماء الزوج المرتب (ٲ، ب*) للمجموعة أ × ب من عدمه، أما قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة أ × ب فهي بالنسبة لانتماء الزوج المرتب (ب*، ٲ) إلى المجموعة أ × ب من عدمه.





ونعلـم أن (ﺃ، ب*) ≠ (ب*، ﺃ) عامـة وعليـه فـإن المقارنـة مـستبعدة لاختلاف عناصر الانتماء، ولتوضيح ذلك نقدم جدول الانتماء الخاص بالجـداء الديكارتي أ × ب، ب×أ (أنظر جدول (١)).

جدول (١)

أ×ب	ب×أ	ب	أ
١	١	١	١
٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠
٠	٠	٠	٠

ملحوظة:

١) قـيم الانتمـاء في العمـود الأول معتمـدة علـى انتمـاء العناصـر ﺃ إلى المجموعة أ من عدمه، وقيم الانتماء بالعمود اثاني معتمدة علـى انتمـاء العنصر ب* إلى المجموعة ب من عدمه.

٢) رغم تطابق قيم الانتماء المتنـاظرة بـالعمودين الأخيريـن فـإن ذلـك لا يعني أن أ×ب = ب×أ لاختلاف عناصر الانتماء.

(٣-٢) تمثيل الجداء الديكارتي:

يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بثلاثة طرق هي:

أ) التمثيل الجدولي. ب) التمثيل السهمي

جـ) التمثيل البياني



وسوف نبين كل طريقة من تلك الطرق من خلال المثال التالي:

مثال٣-٢-١ : مثّل الجداء الديكارتي للمجموعة أ × ب للمجموعتين أ ، ب اللتين بالمثال٣-١-١.

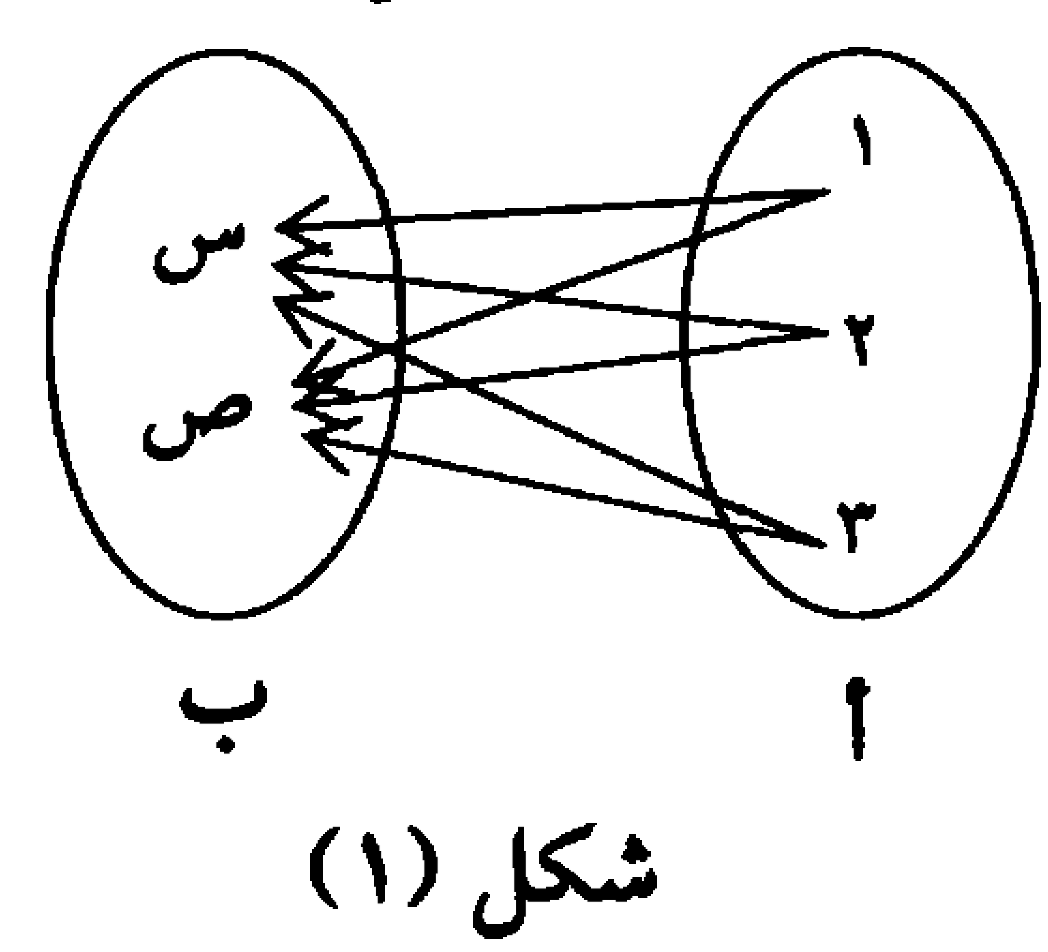
الحل:

أ) التمثيل الجدولي للجداء الديكارتي أ × ب كما هو بالجدول التالي:

جدول (٢)

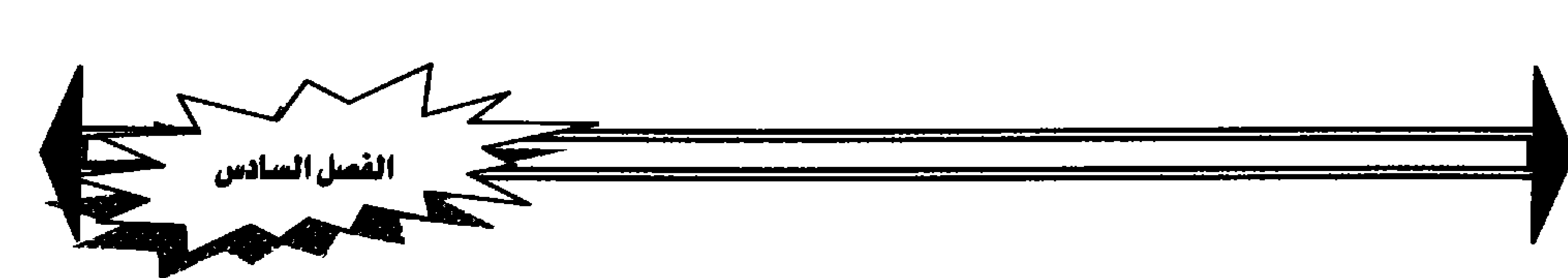
X	س	ص
١	(١، س)	(١، ص)
٢	(٢، س)	(٢، ص)
٣	(٣، س)	(٣، ص)

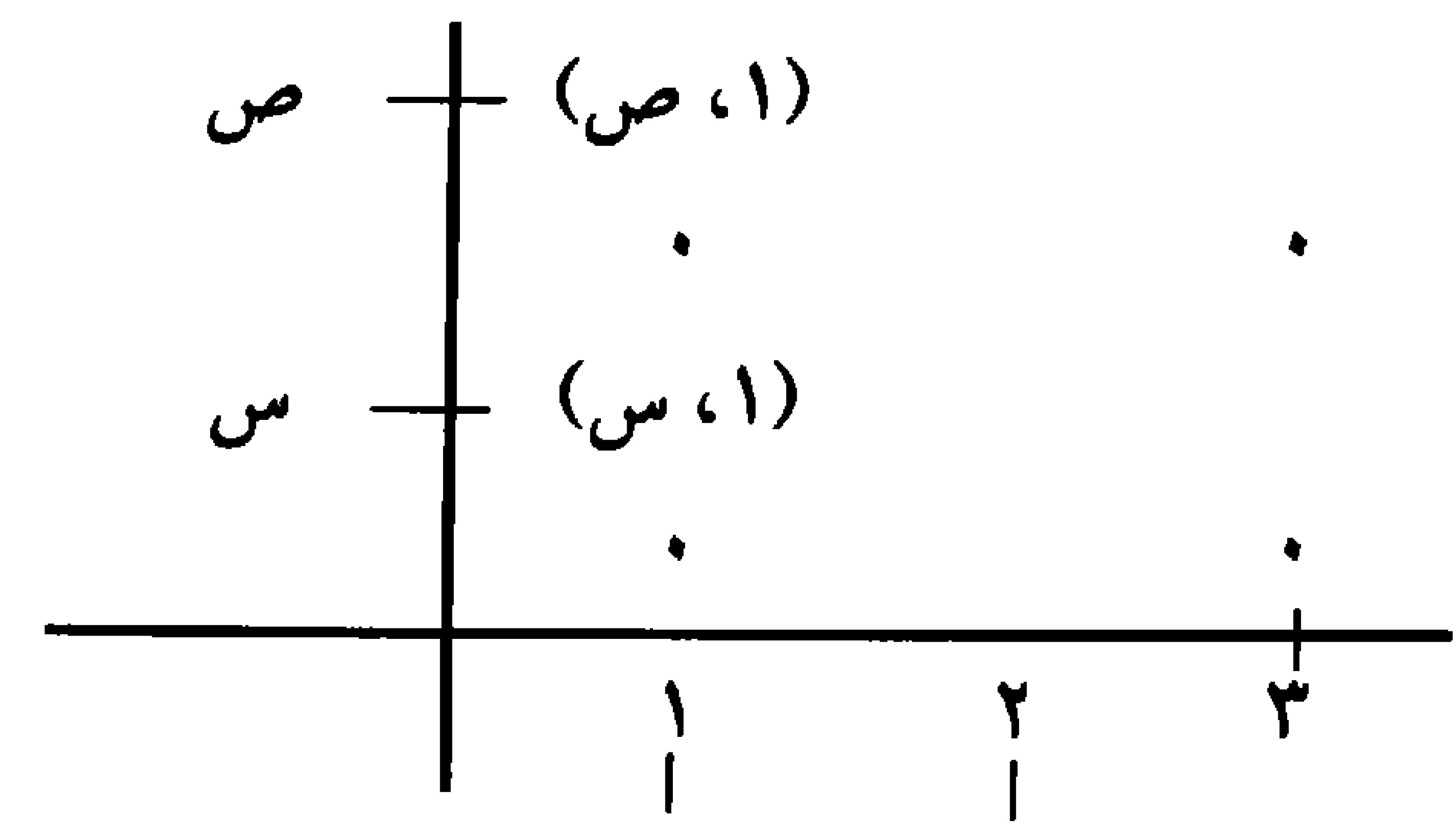
ب) التمثيل السهمي للجداء الديكارتي أ × ب هو عبارة عن أسهم تخرج من كل عنصر من عناصر المجموعة أ إلى كل عنصر من عناصر المجموعة ب



شكل (١)

جـ) التمثيل البياني للجداء الديكارتي أ × ب هو عبارة عن تمثيل العناصر المكوّنة له بنقاط في المستوى الذي محواره الأفقي عناصر أ ومحوره الرأسي عناصر ب (انظر شكل (٢))





نظرية ٣-٢-١: إذا كانت أ، ب، جـ مجموعات غير خالية، أثبت أن:

١) $أ \times \Phi = \Phi \times أ = \Phi$

٢) أ × (ب ∪ جـ) = (أ × ب) ∪ (أ × جـ)

٣) (ب ∪ جـ) × أ = (ب × أ) ∪ (جـ × أ)

٤) أ × (ب ∩ جـ) = (أ × ب) ∩ (أ × جـ)

٥) (ب ∩ جـ) × أ = (ب × أ) ∩ (جـ × أ)

البرهان:

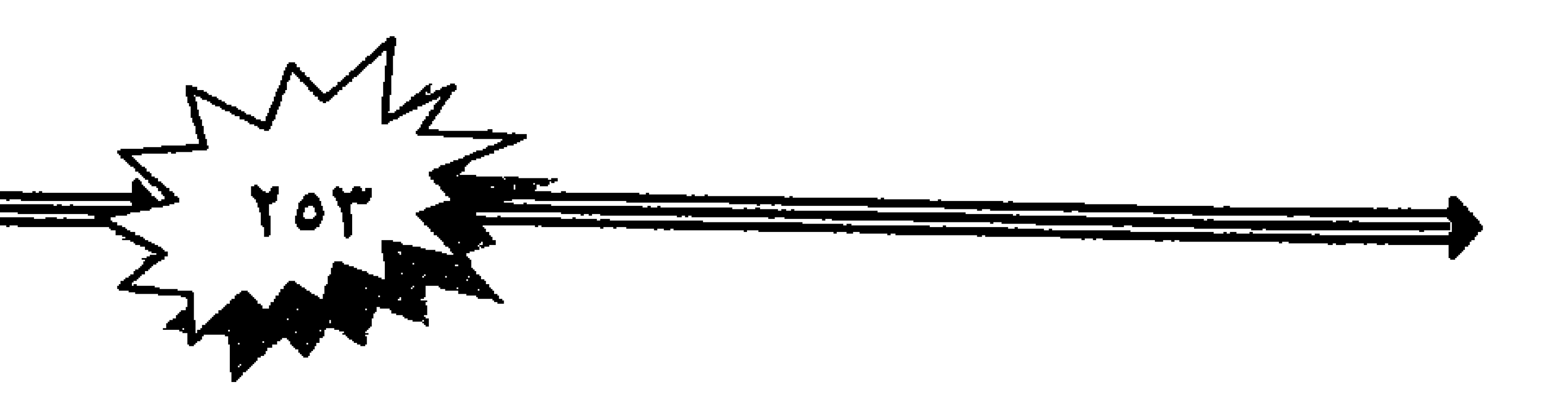
١) لإثبات ذلك نتبع الآتي:

نفرض جدلاً أن أ × $\Phi \neq \Phi$ إذن يوجد زوج مرتب (م، ب*) بحيث (م، ب*) ∋ أ × Φ ⟸ Φ ∋ ب* وهذا تناقض.

ن Φ = أ × Φ بالمثل Φ × أ = Φ

٢) أ × (ب ∪ جـ) = {(س، ص) : س ∋ أ ∧ ص ∋ ب ∪ جـ}

= {(س، ص) : س ∋ أ ∧ [ص ∋ ب ∨ ص ∋ جـ]}





= {(س، ص) : [س ∈ أ ∧ ص ∈ ب] ∨ [س ∈ أ ∧ ص ∈ جـ]}

= {(س، ص) : (س، ص) ∈ أ × ب ∨ (س، ص) ∈ أ × جـ}

= {(س، ص) : (س، ص) ∈ (أ × ب) ∪ (أ × جـــــ)} = (أ×ب) ∪ (أ × جـ)

٣) بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن (ب ∪ جـ) × أ = (ب × أ) ∪ (جـ × أ)

يتضح مما سبق أن عملية × توزيعية على ∪.

سوف نستخدم جدول الانتماء في إثبات الخاصيتين (٤)، (٥) وذلك بعد اعتبار أن

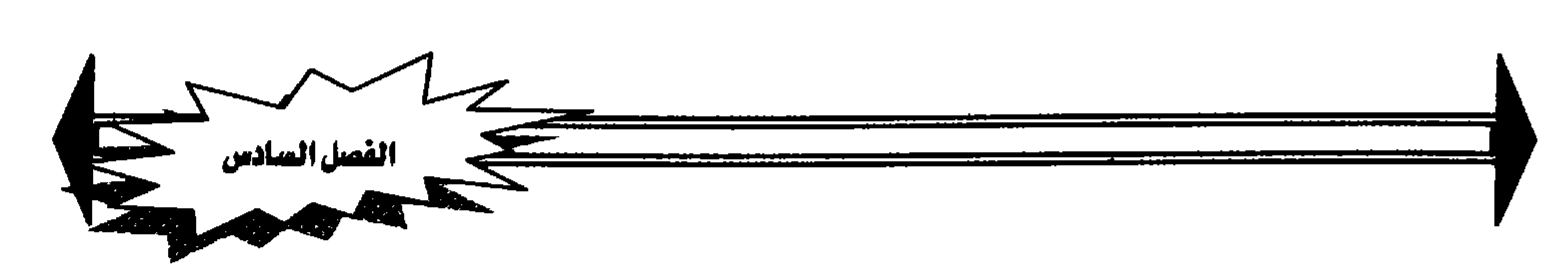
ع = أ ∩ ب ζ = أ × ب μ = أ × جـ τ = ب × أ ρ = جـ × أ

α = أ × (ب ∩ جـ) β = (أ × ب) ∩ (أ × جـ) γ = (ب ∩ جـ) × أ

δ = (ب × أ) ∩ (جـ × أ) وذلك ما يلي:

δ	γ	β	α	ρ	τ	μ	ζ	ع	جـ	ب	أ
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	١	١
٠	٠	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	١	١	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (٣)



نلحظ من الجدول ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين الأخيرين أن $\gamma = \delta$.

أي أن (ب × جـ) × أ = (ب × أ) ∩ (جـ × أ)

ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين قبل الأخيرين يتضح أن $\alpha = \beta$

أي أن أ × (ب ∩ جـ) = (أ × ب) ∩ (أ × جـ) وهذا يعني أن × توزيعية على ∩.

ويجب ملاحظة أن التطابق تم بالنسبة لانتماء العنصر نفسه بالنسبة للطرفين. وعلى سبيل المثال فإن أ × (ب ∩ جـ) ≠ (ب ∩ جـ) × أ، رغم تطابق قيم الانتماء المتناظرة وذلك لأن قيم الانتماء للطرف الأيسر نسبة لانتماء العنصر (س، ص) من عدمه، أما قيم الانتماء للطرف الأيمن فهي نسبة لانتماء العنصر (ص، س) من عدمه.

ملحوظة:

١) إذا كان أ = ب فإن: أ × ب = أ × أ = أ^{٢}

٢) إذا كان أ = ب = ح فإن أ × ب = ح × ح = ح^{٢} وهو المستوى الكارتيزي ويمكن تعميم حاصل ضرب المجموعات على النحو التالي:

إذا كانت أ$_{١}$، أ$_{٢}$، ......أ$_{ن}$ مجموعات اختيارية فإن حاصل ضربهما الديكارتي والذي نرمز له بالرمز $\underset{هـ=١}{\overset{ن}{\pi}}$ أ$_{ا}$ يعرف كما يلي:

$\prod_{هـ=1}^{ن}$ $أ_i = أ_1 \times أ_2 \times ...... \times أ_ن = \{(ا_1، ا_2، ......، ا_ن) : ا_i \in أ_i \ \forall_i \in$ {١، ٢.........ن}}

إذا كان ح = $أ_i$ لكل $i \in$ {١، ٢.........ن}

فـإن $أ^ن = ح^ن = ح \times ح \times .... ح = \{(ا_1، ا_2، ....، ا_ن) : ا_i \in ح \ \forall_i$ $\in$ {١، ٢....ن}}

٣-٣ العلاقات الثنائية Binary Relations:

تعريف ٣-٣-١:

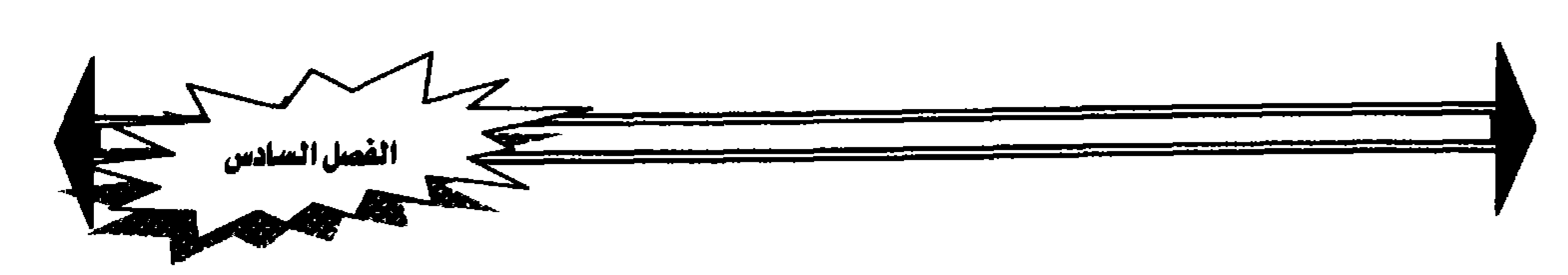
يقال إن ع علاقة من المجموعة غير الخالية أ إلى المجموعة غير الخالية ب إذا كانت ع $\subseteq$ أ × ب

ويقـال إن (أ، ب*) $\in$ ع أو ا ع ب إذا ارتـبط العنـصر ا بالعنـصر ب* وفقاً للعلاقة ع كما يقال إن (أ، ب*) $\in$ ع أو ا $\not\sim$ب* إذا لم يرتبط العنـصر ا بالعنصر ب* وفقاً للعلاقة ع، وكانسحاب طبيعي لمفهـوم الرتبـة علـى العلاقـة، فإن رتبة العلاقة المنتهية هي عدد الأزواج المرتبة التي تكون تلك العلاقة.

مثال ٣-٣-١: بفرض أن أ = {ا، ب*، جـ} ب = {س، ص} فـإن كـلاً مـن $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ علاقة من أ إلى ب حيث:

$ع_1$ = {(ا، ب*)} $ع_2$ = {(ب*، س)، (جـ، ص)} $ع_3$ = أ × ب

يمكن وصف العلاقة ع من المجموعة أ إلى المجموعـة ب سـهمياً علـى أنهـا أسهم تخرج من بعض عناصر أ إلى بعض عناصر ب.



تعريف ٣-٣-٢:

بفرض أن ع علاقة من أ إلى ب، فإن مجال أو نطاق (Domain) العلاقة ع والذي يرمز له بالرمز (Dom (ع)) يعرف كما يلي:

Dom (ع) = { ٲ ∋ أ : E ب* ∋ ب، ٲ ع ب*}.

ويعرف مدى ع (Range) كمايلي :

Range(ع)= {ب* ∋ ب : E ٲ ∋ أ، ٲ ع ب*}.

أي أن مجال (ع) ⊇ أ، مدى (ع) ⊇ ب، إذا كانت أ = ب فنقول إن ع علاقة على أ.

ملحوظة: يمكن لعلاقة أن تحتوي على زوج مرتب واحد ويمكن لعلاقة أخرى أن تساوي أ×ب وكلاهما علاقة. إن هذا المفهوم العام للعلاقة يجعلها بعيدة عن أهدافنا، لذلك سنتعرض بالدراسة لنوعية من العلاقات تعرف بعلاقة التكافؤ:

تعريف ٣-٣-٣:

إذا كانت ع علاقة على المجموعة غير الخالية أ، فإنه يقال إن ع علاقة:

أ) عاكسة (Reffexine) إذا تحقق الشرط الآتي: ٲ ع ٲ ⟸ ∀ ٲ ∋ أ

ب) متناظرة أو متماثلة (symmetric) إذا تحقق الشرط الآتي:

إذا (ٲ، ب*) ∋ ع ⟸ (ب*، ٲ) ∋ ع.

جـ) متعدية أو ناقلة (transitive) إذا تحقق الشرط الآتي:





إذا (ﺃ، ب*)، (ب*، جـ) ∋ ع ⟸ (ﺃ، جـ) ∋ ع

د) تكافؤ (equivalence relation) على أ إذا كانت منعكسة أو متماثلة وناقلة.

مثال٣-٣-٢:

إذا كانت أ = {ﺃ، ب، جـ}. ادرس العلاقات الآتية على أ (أي بين ما إذا كانت علاقة تكافؤ من عدمه مع شرح ذلك).

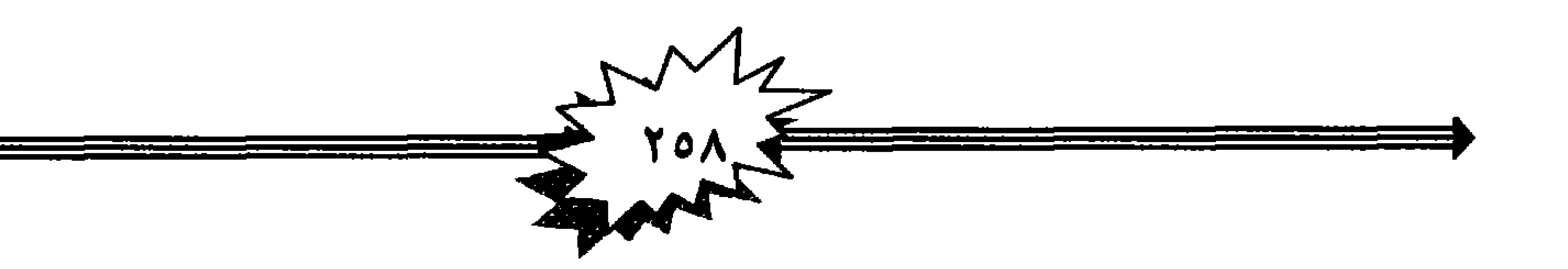
$ع_1$ = {(ﺃ، ﺃ)، (ب، ب)، (جـ جـ)}.

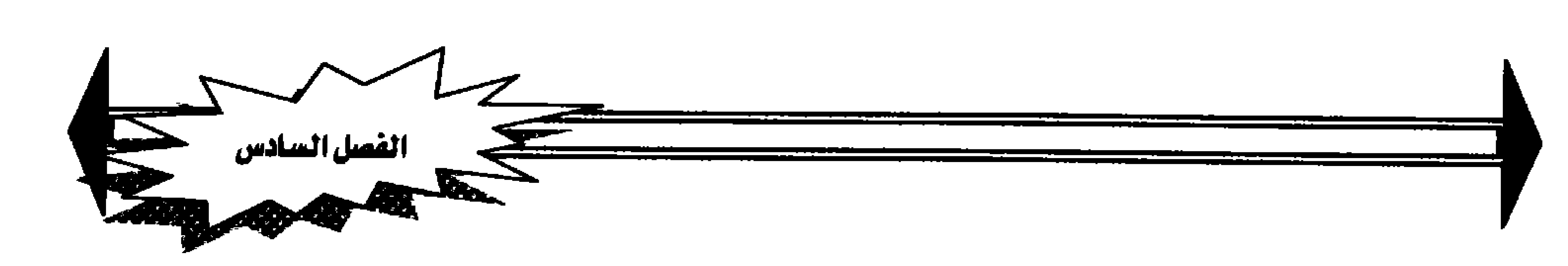
$ع_2$ = {(ﺃ، ﺃ)} $ع_3$ = {(ﺃ، ب)}.

البرهان:

أولاً: العلاقة $ع_1$:

- منعكسة، لأن كل عنصر مرتبط مع نفسه.
- متناظرة، لأن عدم التناظر، يتطلب احتواء ع على الزوج (ﺃ، ب) مثلاً في الوقت الذي لا يحتوي فيه على الزوج (ب,أ) وهذا لم يحدث
- ناقلة، لان العلاقة غير الناقلة تحتوي على (ب،أ)، (أ،ب) مثلا ولا تحتوي على (أ،ج) وهذا لم يحدث، أي ناقلة لعدم وجود ما ينفي ذلك، مما سبق يتضح أن $ع_1$ علاقة تكافؤ وهي أصغر علاقة تكافؤ يمكن تعريفها على أ، وعدد عناصرها يساوي عدد عناصر أ، أي إذا كانت ع علاقة تكافؤ أخرى على أ فإن $ع_1 \supseteq$ ع.





ثانياً: العلاقة $ع_2$:

- غير منعكسة، حيث يوجد عنصر لم يرتبط مع نفسه وعلى سبيل المثال:
ب ∈ أ، (ب، ب)∌ع

- متعدية، لعدم حدوث عكس ذلك، وعلى هذا يتضح أن $ع_2$ غير منعكسة ومتناظرة ومتعدية، أي ليست علاقة تكافؤ كما تحتوي على أقل عدد من الأزواج المرتبة التي تحقق التناظر والتعدي ولا تحقق الانعكاس، أي أن أي علاقة أخرى تحقق الخواص السابقة نفسها فإنها ستحتوي على عدد من العناصر أكبر من أو يساوي عدد عناصر $ع_2$، وعلى هذا فإن $ع_2$ هي العلاقة التي تحقق الخواص السابقة بأقل رتبة.

ثالثاً: العلاقة $ع_3$:

- غير منعكسة لأن (أ، أ) ∌ $ع_3$.
- غير متناظرة لأن (أ، ب) ∈ $ع_3$، (ب، أ) ∌ $ع_3$
- العلاقة $ع_3$ متعدية، مما سبق يتضح أن $ع_3$ ليست علاقة تكافؤ بل هي غير منعكسة وغير متناظرة وفقط متعدية، وتحتوي على أصغر عدد من الأزواج المرتبة، أي أن العلاقة غير منعكسة وغير متناظرة ومتعدية بأقل رتبة.

مثال ٣-٣-٣: إذا كانت أ = {أ، ب، جـ، د} عرف علاقة تكافؤ ع على أ بأقل رتبة، على أن تحتوي على الزوجين المرتبين (أ، ب)، (أ، د) ضمن عناصرها.





الحل: حتى تكون ع منعكسة فلا بد من احتوائها على الأزواج المرتبة الآتية:

(م، م)، (ب، ب)، (جـ جـ)، (د، د)

حتى تكون ع متناظرة فلا بد من احتوائها على الزوجين المرتبين الآتيين:

(ب، م)، (د، م).

- حتى تكون ع متعدية يجب أن تحتوي على (ب، د)، (د، ب) وبعد الاطمئنان على تحقق خاصية التناظر نجد أن ع ستكون كما يلي: ع = {(م، م)، (ب، ب)، (جـ، جـ)، (د، د)، (م، ب)، (م، د)، (ب، م)، (د، م)، (ب، د)، (د، ب)}.

تعريف ٣-٣-٤: إذا كانت ع علاقة متناظرة ومتعدية على أ وأن

∀ م، ب ∋ أ، م ≠ ب ⟸ (م، ب) ∋ ع فإن ع علاقة تكافؤ، أي عاكسة وذلك لأن ∀ م، ب ∋ أ، (م، ب) (ب، م) ∋ ع ولكن ع متعدية، ∵ (م، م) ∋ ع، (ب، ب) ∋ ع ∀ م ، ب ∋ أ.

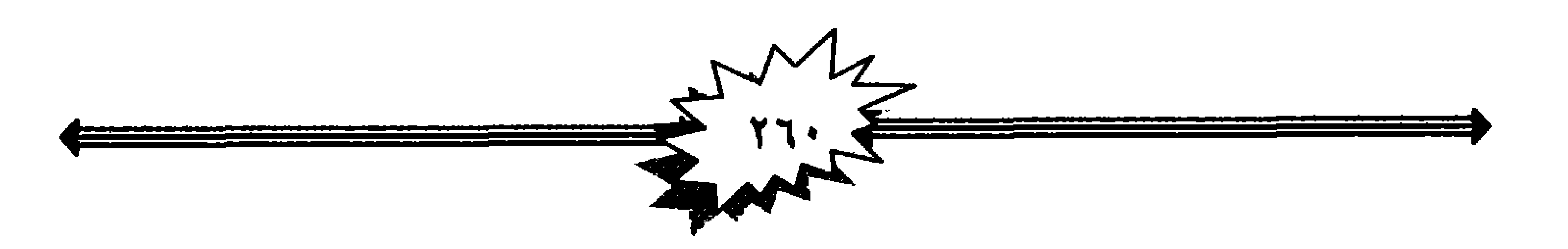
∵ ع منعكسة وبالتالي هي علاقة تكافؤ.

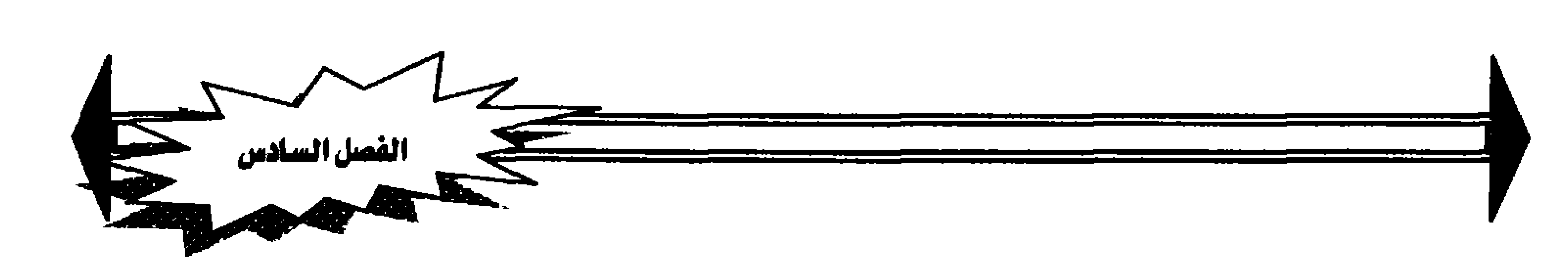
مثال ٣-٣-٤: نفرض أن أ هي مجموعة كل المستقيمات في المستوى، وأن $ع_1$، $ع_2$ علاقتان على أ معرفتان كما يلي: $ع_1$ = {(م، ب) : م، ب ∋ أ، م // ب}.

$ع_2$ = {(م، ب) : م، ب ∈ أ، م ⊥ ب}، ادرس العلاقتين $ع_1$، $ع_2$.

الحل: $ع_1$ منعكسة على اعتبار أن أي مستقيم موازٍ لنفسه

- $ع_1$ متناظرة لأن عملية التوازي تبديلية.





- $ع_1$ متعدية حيث إن عملية التوازي متعدية.

ن $ع_1$ علاقة تكافؤ.

- $ع_2$ ليست عاكسة، لأن المستقيم لا يمكن أن يكون عمودياً على نفسه.
- $ع_2$ متناظرة، لأن عملية التعامد إبدالية.
- $ع_2$ غير متعدية حيث في المستوى إذا $م \perp ب$، $ب \perp جـ \Longleftarrow م // جـ$.

مثال٣-٣-٥:

بفرض أن X مجموعة غير خالية، ون $ع_1$، $ع_2$ علاقتان على $م(X)$ معرفتان كما يلي:

$أ ع_1 ب \Leftrightarrow أ \cap ب \neq \Phi$، أ، ب $\in$ م (x).

$أ ع_2 ب \Leftrightarrow أ - ب = \Phi$، أ، ب $\in$ م (x).

ادرس العلاقتين $ع_1$، $ع_2$.

الحل:

أولاً: بالنسبة للعلاقة $ع_1$

- هذه العلاقة غير منعكسة، لأن $\Phi \in$ م (x)، $\Phi \cap \Phi = \Phi \Longleftarrow$ $(\Phi، \Phi) \notin ع_1$.





- هذه العلاقة متنـاظرة، وذلـك لأن أ $ع_1$ ب ⟸ أ ∩ ب ≠ Φ ⟸ ب ∩ أ ≠ Φ ⟸ ب $ع_1$ أ

هذه العلاقة غير متعدية عامة كما سيتضح من المثال التالي:

مثال٣-٣-٦:

نفرض أن أ = {١، ٢}   ب = {٢، ٣} جـ = {٣، ٤} مجموعات جزئية من المجموعـة X= {١، ٢،............١٠} مـن الواضـح أن أ $ع_1$ ب، لأن أ ∩ ب = {٢} ≠ Φ.

ب $ع_1$ جـــ لأن ب ∩ جـــ = {٣} ≠ Φ لكـــن (أ، ب) ∌ $ع_1$ لأن أ ∩ جـ = Φ

ن $ع_1$ ليست علاقة تكافؤ على (X)م.

ثانياً: بالنسبة للعلاقة $ع_2$:

- هذه العلاقة منعكسة، لأن ∀ أ ∈ (X)م ⟸ أ – أ = Φ ⟸ أ $ع_2$ أ

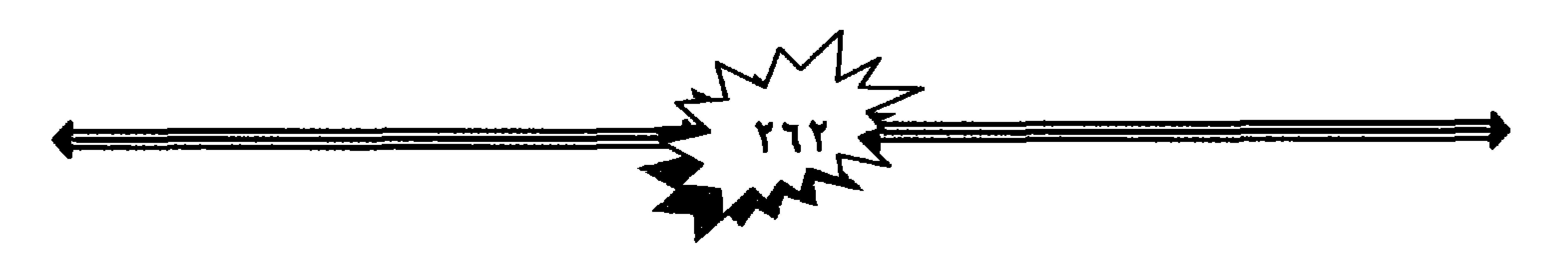
- هذه العلاقة غير متناظرة، لأن ∀ أ، ب ∈ (X)م : أ ⊆ ب، أ ≠ ب ⟸ أ – ب = Φ ⟸ أ $ع_2$ ب بينما (ب، أ) ∌ $ع_2$ لأن ب – أ ∉ Φ.

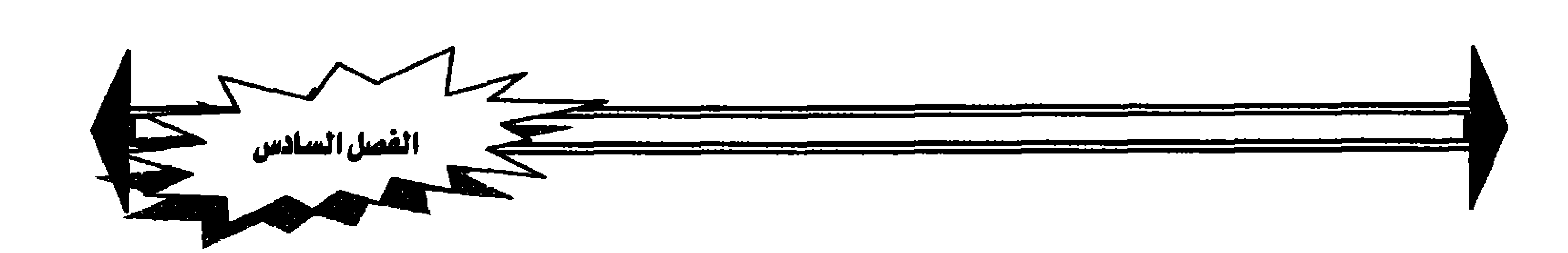
- هذه العلاقة متعدية، لأن

إذا أ $ع_2$ ب، ب $ع_2$ جـ ⟸ أ – ب = Φ، ب – جـ = Φ

⟸ أ ⊆ ب، ب ⊆ جـ ⟸ أ ⊆ جـ ⟸ أ – جـ = Φ ⟸ أ $ع_2$ جـ

$ع_2$ ليست علاقة تكافؤ على (X)م.





٣-٤ فصول التكافؤ Equivelence Classes:

تعريف ٣-٤-١:

إذا كانت ع علاقة تكافؤ على المجموعة أ، ﻢ ∈ أ فإن فصل التكافؤ للعنصر ﻢ والذي يرمز له بالرمز [ﻢ] هو كل العناصر في المجموعة ﻢ التي ترتبط بالعنصر ﻢ وفقا للعلاقة ع، أي ان [ﻢ] = {ب ∈ أ : ﻢ ع ب}.

مثال٣-٤-١:

نفرض أن أ = {ﻢ، ب، جـ، د، هـ} وأن ع علاقة على أ معرفة كما يلي:

ع = {(ﻢ، ﻢ)، (ب،ب)، (جـ جـ)، (د، د)، (هـ هـ)، (ﻢ، جـ)، (جـ ﻢ)، (د، هـ) (هـ د)} واضح أن ع علاقة تكافؤ على أ وأن

[ﻢ] = {ﻢ، جـ}

[ب] = {ب}

[جـ] = {ﻢ، جـ} = [ﻢ]

[د] = {د، هـ}　　　　[هـ] = {د، هـ} = [د]

نلحظ من المثال السابق أن فصل التكافؤ لأي عنصر هو مجموعة غير خالية، كما أن فصول التكافؤ غير متقاطعة وإلا فهي متطابقة، أي متساوية، كما يلاحظ أن اتحاد كل فصول التكافؤ يعطي المجموعة أ.

نظرية٣-٤-١:

بفرض أن ع علاقة تكافؤ على المجموعة أ، إذن ١) ∀ ﻢ ∈ أ، [ﻢ] $\neq \Phi$





٢) $\forall$ ؏، ب $\in$ أ $\Leftarrow$ [؏] $\cap$ [ب] = Φ أو [؏] = [ب]

٣) أ = $\cup$ {[؏] : ؏ $\in$ أ}.

البرهان:

١) حيث ع علاقة تكافؤ، إذن ؏ ع ؏ لكل ؏ $\in$ أ، وهذا يؤدي إلى ؏ $\in$ [؏] وعليه فإن [؏] $\neq \Phi$.   ٢) نفـــرض العكـــس أي [؏] $\cap$ [ب] $\neq \Phi$ ويلزم إثبات أن [؏] = [ب]

ن [؏] $\cap$ [ب] $\neq \Phi$ $\Leftarrow$ E س$\in$ [؏] $\cap$ [ب] $\Leftarrow$ س$\in$ [؏]

$\wedge$ س $\in$ [ب] $\Leftarrow$ س ع ؏ $\wedge$ س ع ب.

وبموجب أن ع علاقة تكافؤ، إذن ع متناظرة ومتعدية أي أن س ع ؏، ؏ ع ب، س ع ب،

ب ع س، ؏ ع ب، ب ع ؏. لنفرض ص $\in$ [؏] $\Leftarrow$ ص ع ؏.

وحيث أن ؏ ع ب والعلاقة ع متعدية، ن ص ع ؏ $\wedge$ ؏ ع ب $\Leftarrow$ ص ع ب $\Leftarrow$ ص $\in$[ب]

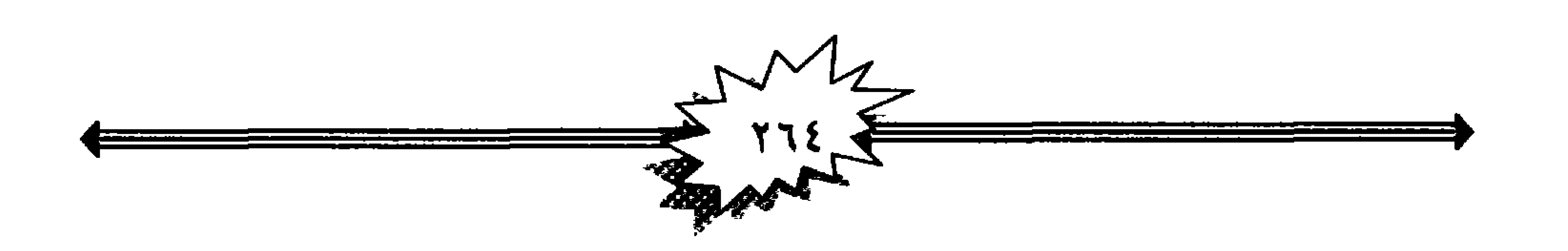
(١) ن [؏] $\subseteq$ [ب]

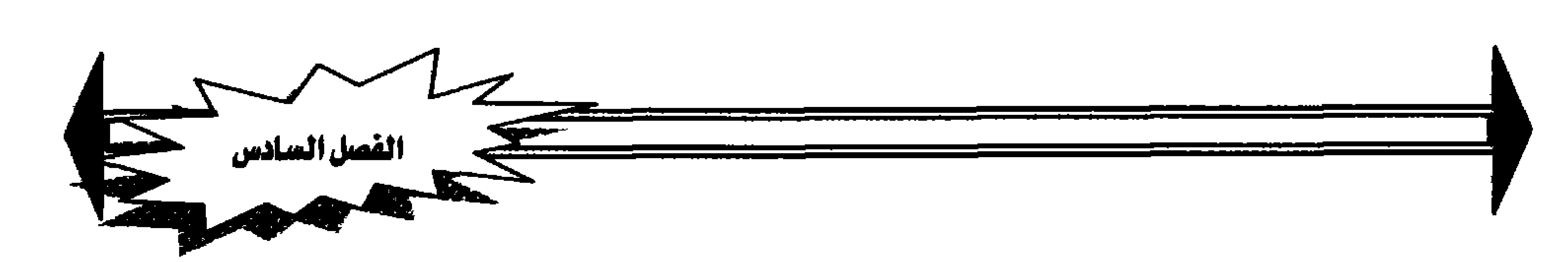
لنفرض ص $\in$ [ب] $\Leftarrow$ ص ع ب وحيث أن ب ع ؏ والعلاقـة متعديـة ن

ص ع ب، ب ع ؏ $\Leftarrow$ ص ع ؏ $\Leftarrow$ ص $\in$ [؏].

ن [ب] $\subseteq$ [؏].............(٢)

من (١) و (٢) نحصل على أن [؏] = [ب].





(٣) البرهان يتم على النحو التالي:

(١) [م] ⊆ أ، ∀ م ∈ أ ن ∪ {[م]، م ∈ أ} ⊆ أ

لنفرض م ∈ أ ⟸ م ∈ [م] ⊆ ∪ {[م] : م ∈ أ} ن أ ⊆ ∪ {[م] : م ∈ أ}......(٢)

من (١) و(٢) نحصل على أن أ = ∪ {[م] : م ∈ أ} أي أن فصول التكافؤ عبارة عن تجزيء للمجموعة X.

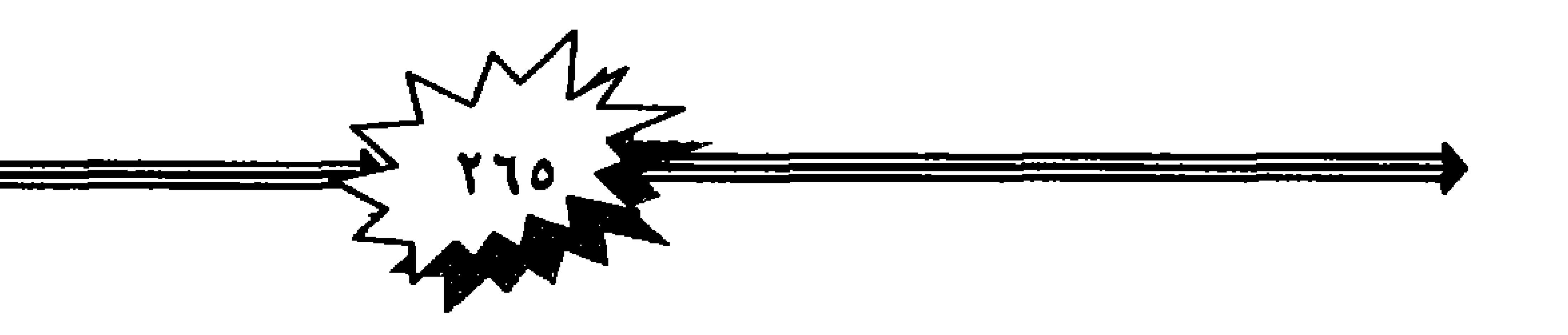
مثال٣-٤-٢: بفرض أن ع علاقة تكافؤ على X، التي تحتوي على ن عنصر، وكان أحد فصول التكافؤ لتلك العلاقة يحتوي على م عنصر، فما هو أكبر عدد ممكن لفصول التكافؤ لتلك العلاقة؟

الحل: وجود فصل تكافؤ يحتوي على م عنصر، يعني بالطبع أن م من عناصر X مرتبطة ببعضها البعض، يتبقى من عناصر X عدداً يساوي ن – م، وللحصول على أكبر عدد من فصول التكافؤ يستلزم أن يرتبط كل عنصر من تلك العناصر مع نفسه فقط وبذلك نحصل ن – م فصل تكافؤ، أي أن مجموع أكبر عدد من فصول التكافؤ هو ن – م + ١ فصل تكافؤ.

مثال٣-٤-٣: بفرض أن X = {م، ب، جـ د، هـ}، عرّف علاقة تكافؤ على X، شريطة أن تحتوي على الزوجين المرتبين (أ، ب)، (ب،د) وذات أقل رتبة ممكنة، ثم أوجد فصول التكافؤ.

الحل:

- حتى تكون ع علاقة تكافؤ فلا بد من احتوائها على الأزواج المرتبة التالية:





(أ، أ)، (ب، ب)، (جـ، جـ)، (د، د)، (هـ، هـ).

- حتى تكون ع متناظرة فلا بد من احتوائها على الزوجين المرتبين (ب، أ)، (د، ب) وذلك لأنها تحتوي على (أ، ب)، (ب، د).

- حتى تكون ع متعدية فلا بد من احتوائها على الزوجين (د، أ)، (أ، د).

∴ ع = {(أ، أ)، (ب، ب) (جـ، جـ)، (د، د)، (هـ، هـ)، (أ، ب)، (ب، أ)، (ب، د)،

(د، ب)، (أ، د)، (د، أ)}.

وأن فصول التكافؤ هي كما يلي:

[أ] = {أ، ب، د} = [ب] = [د].

[جـ] = {جـ} ، [هـ] = {هـ}

مثال ٣-٤-٤:

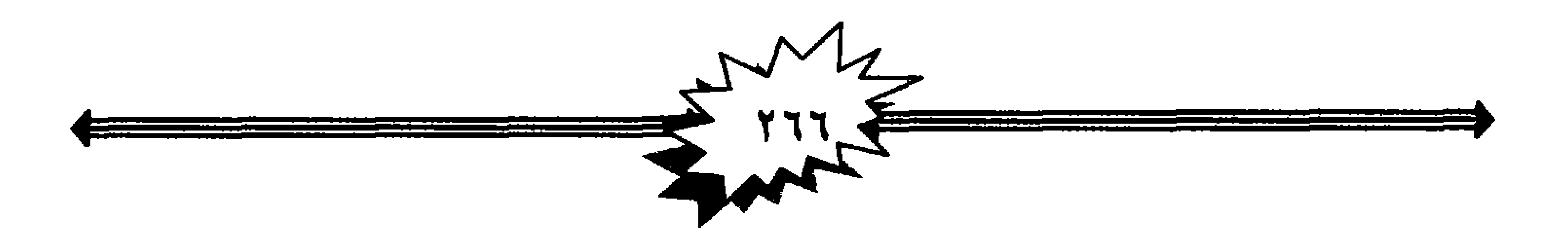
بفرض أن $ع_1$، $ع_2$ علاقتا تكافؤ على X التي تحتوي على ن عنصر، وكان للعلاقة $ع_1$ عدد ن من فصول التكافؤ، وكان للعلاقة $ع_2$ فصل التكافؤ واحد، صف كلاً من $ع_1$، $ع_2$.

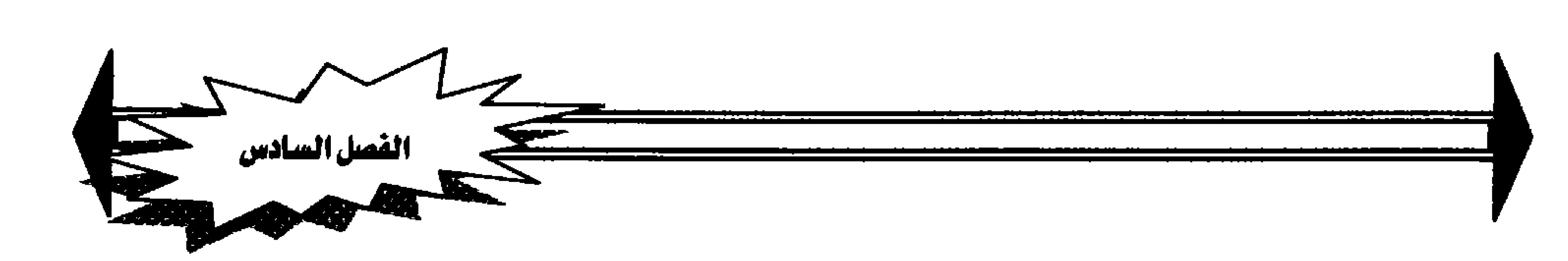
الحل: نفرض أن X = {$أ_1$، $أ_2$، .... $أ_ن$}

أولاً: فصول تكافؤ العلاقة $ع_1$ عددها ن وهي تحقق الآتي:

(١) اتحادها يعطي المجموعة ×.

(٢) تقاطع أي فصلين مختلفين يساوي Φ وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت





$ع_١ = \{(أ_١، أ_١)، (أ_٢، أ_٢) ....(أ_ن، أ_ن)\}$

ثانياً: علاقة التكافؤ $ع_٢$ لها فصل تكافؤ واحد، وهذا يعني أن × هي ذلك الفصل ولا يتأتى هذا إلاّ إذا كانت $ع_٢ = × × ×$.

مثال٣-٤-٥:

بفرض أن $ع_١$، $ع_٢$ علاقتان على المجموعة $X \neq \Phi$، ناقش صحة العبارة:

$ع_١$، $ع_٢$ علاقتان ناقلتان $\Leftrightarrow$ $ع_١ \cap ع_٢$ علاقة ناقلة.

الحل: العلاقتان $ع_١ = \{(أ، ب)\}$ $ع_٢ = \{(ب، جـ)\}$ علاقتان ناقلتان على المجموعة × = {أ، ب، جـ، د} بينما $ع_١ \cup ع_٢ = \{(أ، ب)، (ب، جـ)\}$ علاقة غير ناقلة وعلى ذلك فإن العبارة خطأ في الاتجاه $\Longrightarrow$ من ناحية أخرى إذا كان $ع_١$، $ع_٢$ علاقتين على المجموعة × بحيث أن

$ع_١ = \{(ب، ب)، (أ، ب)، (ب، جـ)\}$

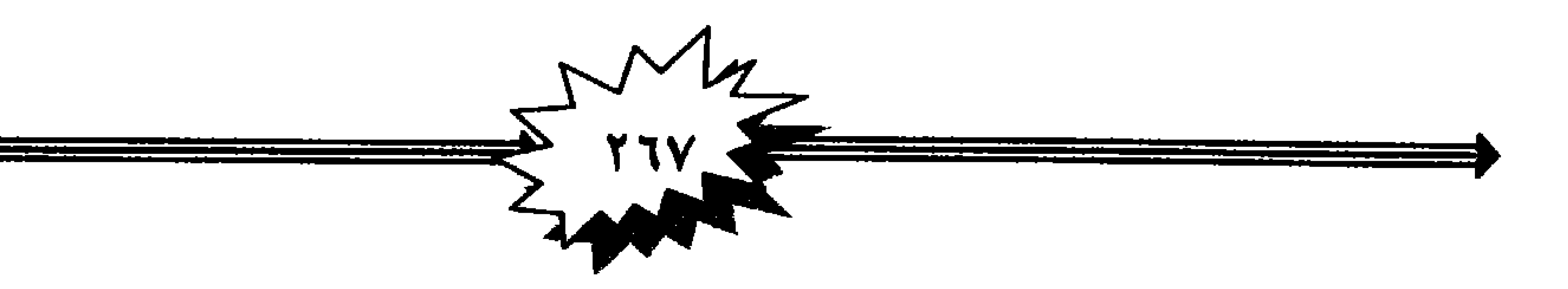
$ع_٢ = \{(جـ، جـ)، (أ، جـ)، (جـ ب)\}$. فإن $ع_١ \cup ع_٢$ علاقة ناقلة إلاّ أن كلاً من $ع_١$، $ع_٢$ علاقة غير ناقلة، إذن العبارة أيضاً خطأ في الاتجاه $\Longleftarrow$.

مثال٣-٤-٦:

إذا كانت ع علاقة على ص معرفة كما يلي:

$ع = \{(س، ص): س، ص^* \in ص، س + ص^* = عدد زوجي\}$.

ادرس العلاقة ع، ثم أوجد فصول التكافؤ في حالة ما إذا كانت علاقة تكافؤ.





الحل:

- العلاقـة ع منعكـسة، لأن ∀ س ∋ ص ⟸ [س + س = عـدد زوجـي] ⟸ س ع س

- العلاقة ع متناظرة لأن عملية الجمع إبدالية، أي س + ص* = عدد زوجي ⟸ ص* + س = عدد زوجي

∴ س ع ص* ⟸ ص* ع س ∀ س، ص* ∈ ص.

- العلاقة ع متعدية كما يتضح على النحو الآتي: لنفـرض س ع ص*، ص* ع ص إذا كانت فردية فهـذا يحـتم أن تكـون ص* فرديـة، لأن س ع ص* وطالما ص* فردية فهذا يحتم أن تكون ص فرديـة، لأن ص ع ص* وعلـى ذلك يكون س + ص عدداً زوجياً.

أما فصول التكافؤ فهي:

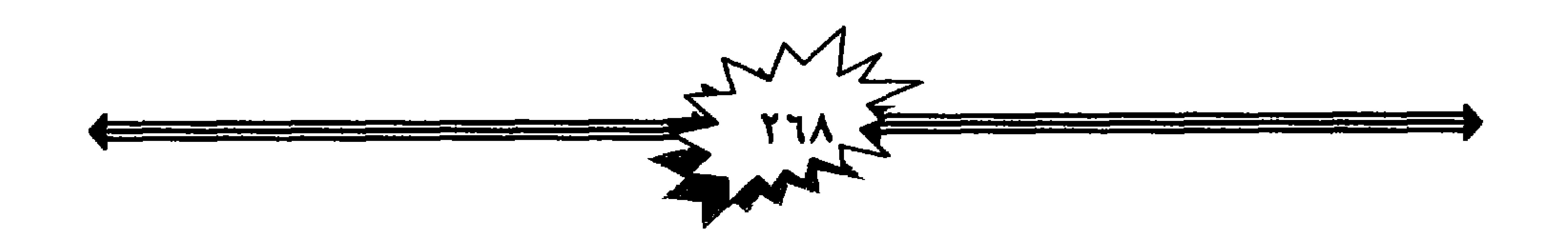
[٠] = {س ∋ ص : س + ٠ = عدد زوجي} = {٠، ±٢، ±٤، ....}

[١] = {س ∋ ص : س + ١ = عدد فردي} = {١، ±٣، ±٥، ....}

(٣-٥) التجزئ Partition:

تعريف ٣-٥-١:

العائلة أ = {أ$_i$} والمكونة من مجموعات جزئية غير خالية مـن المجموعـة X يقال إنها تجزئة للمجموعة X إذا تحقق الشرطان الآتيان:



١) $\forall$ $أ_i$، $أ_j \in$ أ، $أ_i \neq أ_j \Longrightarrow أ_i \cap أ_j = \Phi$. أي منفصلة مثنى مثنى

٢) $X = \cup أ_i$

ومن السهل ملاحظة الآتي:

$X = \cup أ_i \Leftrightarrow \forall$ س $\in X$، $\exists\, أ_i \in$ أ : س $\in أ_i$

مثال ٣-٥-١:

إذا كانت X مجموعة غير خالية، وأن أ مجموعة جزئية فعلية من X إذن أ = {أ ، $\bar{أ}$} تجزئة للمجموعة X، لأن أ $\neq \Phi$، $\bar{أ} \neq \Phi$، أ $\cap\, \bar{أ} = \Phi$، X = أ $\cup\, \bar{أ}$.

لاحظ أن {أ ، $\bar{أ}$} تنتج علاقة تكافؤ X، يمكن تعريفها كالتالي:

أ ع ب $\Leftrightarrow$ أ، ب $\in$ أ $\vee$ أ، ب $\in \bar{أ}$، $\forall$ أ، ب $\in X$

وتسمى علاقة التكافؤ المصاحبة للتجزئة أ

مثال ٣-٥-٢:

إذا كانت ب = {أ، ب*، جـ} فإن أ = {{أ}، {ب*، جـ}} تجزئة للمجموعة ب، نلحظ أن أ تنتج علاقة تكافؤ على المجموعة ب حيث

ع = {(أ، أ)، (ب*، ب*)، (جـ جـ)، (ب*، جـ)، (جـ ب*)}.

ملحوظة:

يتضح من نظرية (٣-٤-١) أنه إذا كانت ع علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية X فإن عائلة فصول التكافؤ تجزئة للمجموعة X.



نظرية٣-٥-١ :

أي تجزئة للمجموعة غير الخالية X تعرف عليها علاقة تكافؤ وتكون أعضاء التجزئ هي فصول التكافؤ.

البرهان:

نفرض أن أ = {أ١، أ٢،.........أن} تجزئة للمجموعة X، ونفرض أن ع علاقة على X معرفة كما يلي:

$$\text{ﻫ ع ب} \Leftrightarrow E\ \text{أ}_i \ni \text{أ} = \text{ﻫ، ب} \ni \text{أ}_i$$

بدراسة هذه العلاقة نجد أن:

- ع منعكسة، لأن $\forall$ ﻫ $\ni$ ×، ن أ$_j$ $\ni$ أ : ﻫ $\ni$ أ$_j$ $\Longleftarrow$ ﻫ ع ﻫ

ع متناظرة، لأن

إذا ﻫ ع ب $\Longleftarrow$ E أ$_j$ $\ni$ أ : ﻫ، ب $\in$ أ$_j$ $\Longleftarrow$ ب، ﻫ $\ni$ أ$_j$ $\Longleftarrow$ ب ع ﻫ

- ع علاقة متعدية لأن ﻫ ع ب، ب ع جـ $\Longleftarrow$ E أ$_j$، أ$_j$ $\ni$ أ، ﻫ، ب $\ni$ أ$_j$، ب، جـ $\ni$ أ$_j$ $\Longleftarrow$ أ$_j$ $\cap$ أ$_j$ = {ب} $\neq \Phi$

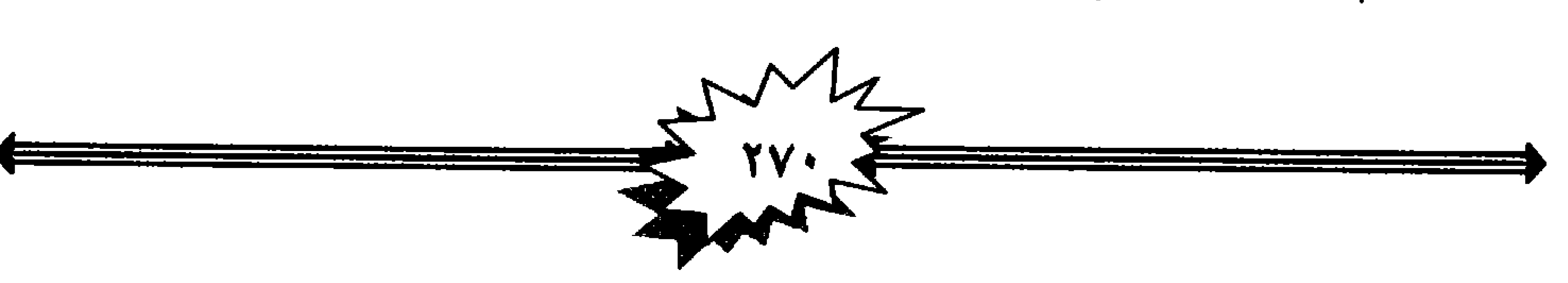
ومن خواص أعضاء التجزئ سوف يؤدي ذلك إلى أن أ$_i$ = أ$_j$

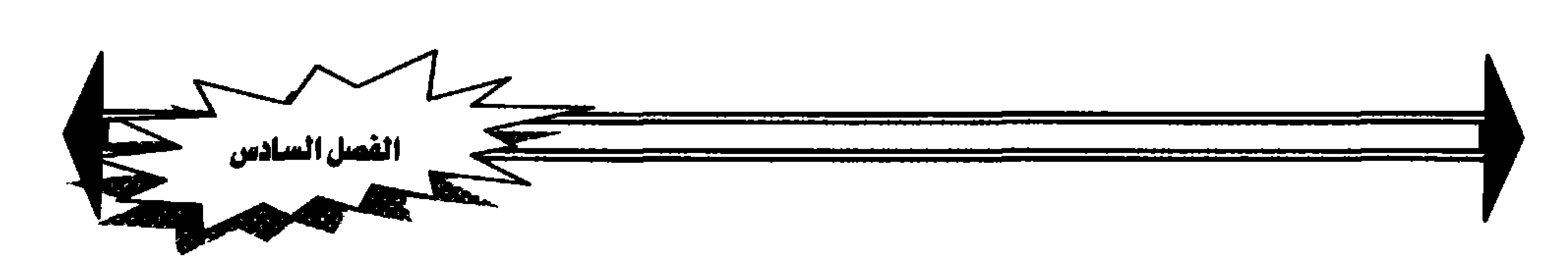
ن ﻫ، ب جـ $\in$ ﻫ ع ب

ن ع علاقة تكافؤ

سنبرهن أن { أ$_i$ ، أ٢،.........ﻫن} هي فصول التكافؤ، أي أن:

$$\forall \text{ ﻫ} \ni \text{أ}_i \Leftrightarrow [\text{ﻫ}] = \text{أ}_i$$



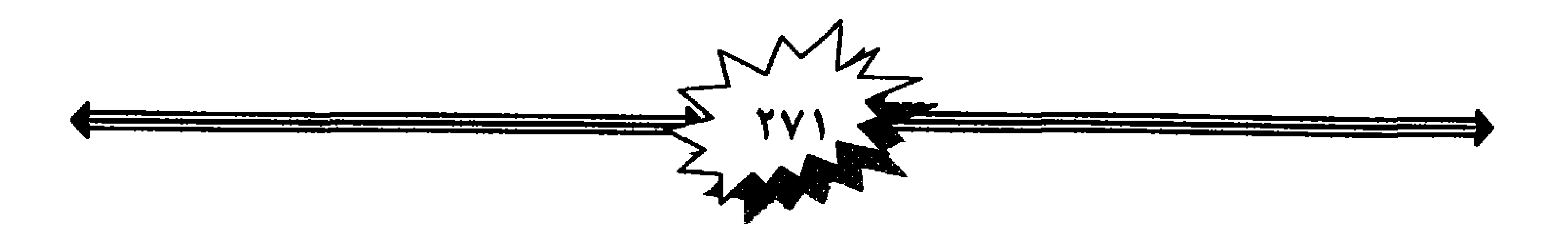


لنفرض أن م ∈ X ⟸ E أ$_i$ ∈ أ : م ∈ أ$_i$

لنفرض أن س ∈ أ$_i$ ⟸ س ع أ ⟸ س ∈ [م] ⟸ أ$_i$ ⊆ [م]

لنفــرض أن ص = [م] ⟸ ص ع م ⟸ E أ$_j$: م، ص ∈ أ$_j$ ⟸ ص ∈ أ$_i$ ⟸ [م] ⊆ أ$_i$

من (١)، (٢) نحصل على [أ$_i$] = [م].





تمارين

١) إذا كانت أ = {١، ٢، ٣} ب = {٢، ٣، ٥} جـ = {١، ٣، ٥، ٧}

أوجد الآتي:

١) أ × أ

٢) أ × (ب − جـ)

٣) أ × (ب Δ جـ)

٤) أ × ب $\cap$ (ب × أ)

٥) (أ − ب) × (أ − جـ)

٦) (ب Δ أ) × (ب Δ جـ)

٢) للمجموعات الاختيارية أ، ب ، جـ، أثبت أن

١) أ × (ب − جـ) = (أ × ب) − (أ × جـ)

٢) (ب − جـ) × أ = (ب × أ) − (جـ × أ)

٣) أ × (ب Δ جـ) = (أ × ب) Δ (أ × جـ)

٤) (ب Δ جـ) × أ = (ب × أ) Δ (جـ × أ)

٣- إذا كانت أ = {١، ٢، ٣} وكانت ب = {-٢، ٠، ٢، ٥}

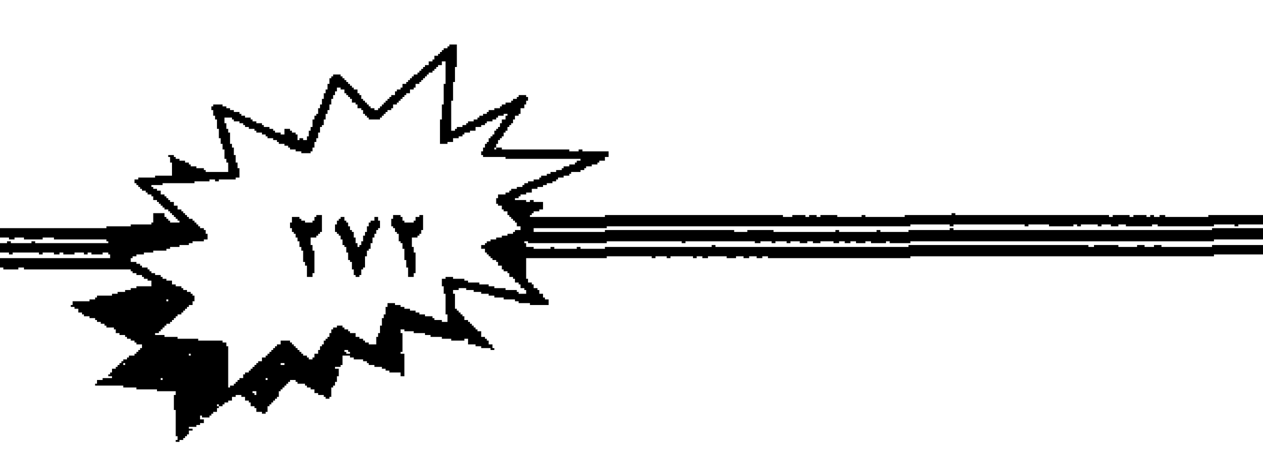
أ) أوجد العلاقة ع من أ إلى ب حيث

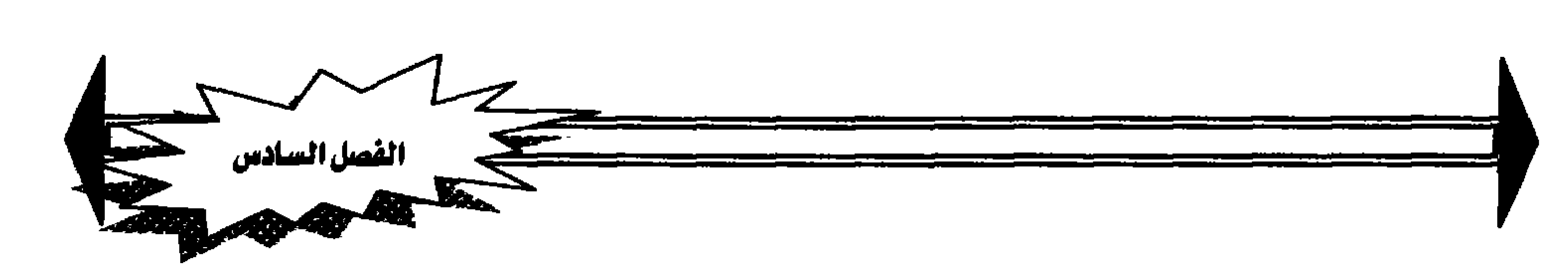
(م، ب*) $\in$ ع$_1$ $\Leftrightarrow$ م < ب*.

ب) أوجد العلاقة ع$_2$ من أ إلى ب حيث (م، ب*) $\ni$ ع$_2$ $\Leftrightarrow$ م > ب*.

٤) نفرض أن ع علاقة على ط معرفة كما يلي:

ع = {(س، ص) : س، ص $\ni$ ط، س + ٢ص = ١٢}





أ) اكتب عناصر ع.

ب) أوجد نطاق ومدى ع

٥) بفرض أن ع علاقة على ط × ط معرفة كما يلي:

(ٲ، ب) ع (جـ، د) $\Leftrightarrow$ ٲد = ب جـ

أثبت أن ع علاقة تكافؤ

٦) بفر أن ع علاقة على ص معرفة كما يلي:

ع = {(س، ص*) : س، ص* $\in$ ص، س + ص* = عدد فردي}.

ادرس العلاقة ع.

٧) ادرس العلاقة ع على ص في كل حالة مما يأتي:

١) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ ٲ > ب

٢) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ ٲ − ب هو عدد زوجي

٣) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ ٲ ب ≤ ٠

٤) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ ٲ^{٢} = ب^{٢}

٥) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ |ٲ − ب| > ١

٦) (ٲ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ ٲ ≠ ب

٨) نفرض أن أ = {ٲ، ب، جـ} عرف علاقة ع على أ ذات أقل رتبة بحيث تكون:

أ) منعكسة ومتناظرة وغير متعدية.



ب) منعكسة وغير متناظرة ومتعدية.

جـ) منعكسة وغير متناظرة وغير متعدية.

د) غير منعكسة وغير متناظرة ومتعدية.

هـ) غير منعكسة وغير متناظرة وغير متعدية.

و) علاقة تكافؤ بحيث [أ] = [ب].

٩) بفرض أن ص١، ص٢، ص٣ مجموعات جزئية من حيث أن:

ص١ = {ن ∈ ص: ن = ٣م، م ∈ ص}

ص٢ = { ن ∈ ص: ن = ٣م + ١، م ∈ ص}

ص٣ = { ن ∈ ص : ن = ٣م +٢ : م ∈ ص}

أ) أثبت أن {ص١، ص٢، ص٣} تجزئة للمجموعة ص.

ب) عرّف علاقة التكافؤ على ص بحيث تكون ص١، ص٢، ص٣ هي فصول التكافؤ.

١٠) إذا كانت ع علاقة على مجموعة غير خالية أ، أثبت أن:

أ) ع متناظرة ⇔ $ع^{-1}$ متناظرة

ب) ع متعدية ⇔ $ع^{-1}$ متعدية.

١١) نفرض أن × مجموعة غير خالية، ادرس العلاقة في كل حالة مما يلي:

١) (أ، ب) ∈ ع ⇔ أ ∩ ب = Φ، أ، ب ∈ م(×)

٢) (أ، ب) ∈ ع ⇔ أ ⊆ ب، أ، ب ∈ م(×)

٣) (أ، ب) ∈ ع ⇔ أ ∪ ب = ×، أ، ب ∈ م(×)

٤) (أ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ أ − ب = Φ، أ ، ب $\in$ $P(X)$

٥) (أ، ب) $\in$ ع $\Leftrightarrow$ أ $\supseteq$ ب $\vee$ ب $\supseteq$ أ، أ ، ب $\in$ $P(X)$

حيث $P(X)$: مجموعة كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من المجموعة غير الخالية X

١٢) بفرض أن ع$_1$ و ع$_2$ علاقتان على المجموعة غير الخالية $\times$، ناقش صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

أ) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cup$ ع$_2$ علاقة منعكسة.

ب) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cap$ ع$_2$ علاقة منعكسة.

جـ) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ − ع$_2$ علاقة منعكسة.

د) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cup$ ع$_2$ علاقة متماثلة.

هـ) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cap$ ع$_2$ علاقة متماثلة.

و) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ − ع$_2$ علاقة متماثلة.

ز) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان ناقلتان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cap$ ع$_2$ علاقة ناقلة.

ح) ع$_1$، ع$_2$ علاقتان ناقلتان $\Leftrightarrow$ ع$_1$ − ع$_2$ علاقة ناقلة.

ط) ع$_1$، ع$_2$ علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cup$ ع$_2$ علاقة تكافؤ.

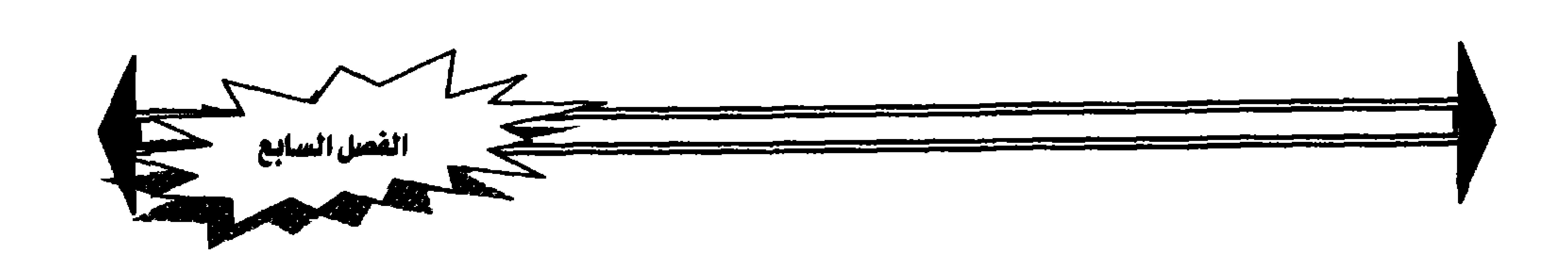
ك) ع$_1$، ع$_2$ علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow$ ع$_1$ $\cap$ ع$_2$ علاقة تكافؤ.

ل) ع$_1$، ع$_2$ علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow$ ع$_1$ − ع$_2$ علاقة تكافؤ.

ملحوظة: المناقشة تعني البرهان في حالة نعم ومثالاً عكسياً في حالة لا.



الدوال والمخططات



الفصل السابع

الدوال ومخططاتها

٢- العلاقة Relation:

قبل أن ندرس مفهوم الدالة يجب أن نوضح مفهوم العلاقة وبهذا سنجد مدخلاً إلى هذا المفهوم الذي يلعب دوراً أساسياً في حساب التفاضل والتكامل. حيث أن العرب قد عرفوا نظام حساب المساحات للأشكال الهندسية ومنها أشكال المقاطع المخروطية، غير أن عدم وجود مفهوم خاص للدالة أوقف الحساب فترة من الزمن. لهذا فهناك قفزة واضحة في هذا المضمار بعد أن وجد مفهوم الدالة.

لنبدأ أولاً بتعريف الأزواج المرتبة.

تعريف٢-١: لتكن كل من س، ص مجموعة غير خالية، فلكل س* ∋ س، وص* ∋ ص يوجد زوج مرتب ordered pair (س*، ص*)، يعرف (س*، ص*) = { س*، {س*، ص*} ومن هذا التعريف يكون:

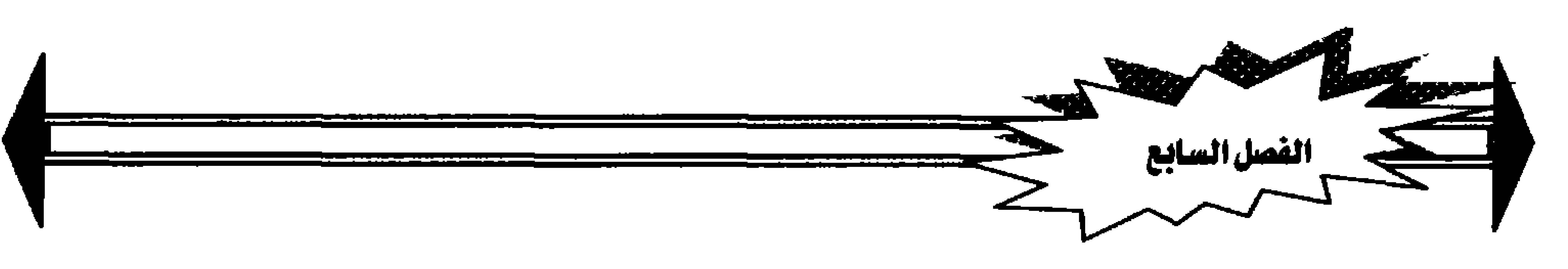
ص* = ب و س* = ﺃ ⇔ (س* ص*) = (ﺃ ب)

ويدعى س* بالإحداثي الأول ويدعى ص* بالإحداثي الثاني، كما توجد مجموعة كل الأزواج المرتبة للمجموعتين س، ص ويرمز لها س × ص ويكون:

س × ص = {(س*، ص*) : س* ∋ س، ص* ∋ ص}.

ولتوضيح فكرة الأزواج المرتبة بين مجموعتين فإننا سنعطي الأمثلة التالية:





مثال (١):

لتكن كل من س، ص مجموعة من الأشخاص وأن {وليد، صبا، ياسمين} = س.

و ص= {أحمد، سيف} فإن (وليد، سيف) زوج مرتب من هاتين المجموعتين كما أن (صبا، أحمد) زوج مرتب أيضاً. ومن التعريف ٢-١ يكون:

{(ياسمين، سيف)، (ياسمين، أحمد)، (صبا، سيف)، (صبا، أحمد)، (وليد، سيف)، (وليد، أحمد)} = س × ص

كما توجد مجموعة أخرى من الأزواج المرتبة هي:

{(سيف، ياسمين)، (أحمد، ياسمين)، (سيف، صبا)، (أحمد، صبا)، (سيف، وليد)، (أحمد، سيف)} = ص × س

مثال (٢): لتكن كل من س، ص مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة ص، حيث س = {١، ٢} و ص = {-١، ٠، ١} فإن (٢، ٠) زوج مرتب في س، وص كما أن (٠، ٢) يكون زوج مرتب في ص و س فعليه نستطيع القول أن:

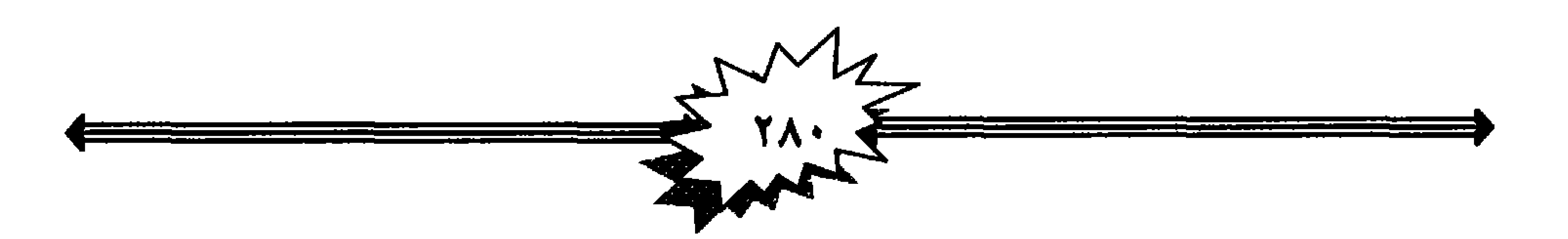
س × ص = {(١، ١)، (١، ٠)، (١، -١)، (٢، ١)، (٢، ٠)، (٢، -١)}

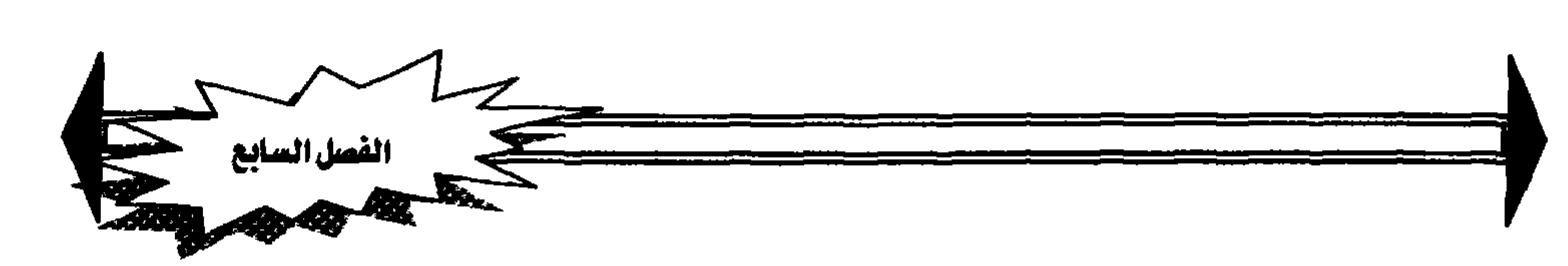
ص × س = {(١، ١)، (١، ٢)، (٠، ١)، (٠، ٢)، (-١، ١)، (-١، ٢)}.

ومن هذين المثالين نجد أنه ليس من الضروري أن تكون س × ص تساوي ص × س لذا فإن الترتيب هنا ذا أهمية واضحة، لذا قلنا زوج مرتب.

تعريف٢-٢:

لتكن كل من س، ص مجموعة غير خالية، ولتكن ن مجموعة غير خالية





مـن أزواج مرتبـة (س*، ص*) حيـث س* ∈ س و ص* ∈ ص أي أن ى ⊂ س × ص فيقال أن ى علاقة Relation من س إلى ص، بمعنى آخر:

Φ = ى س × ص ⇔ ي علاقة من س إلى ص.

مثال (٣):

لتكن كل من س و ص مجموعة كما في مثال (٢)، فإن المجموعة ى = {(٢، ٠)، (١، ٠)، (١، -١)} ⊂ س × ص

تكون علاقة مـن س إلى ص بينما المجموعة هـ = {(-١، ٢)، (٠، ٢)}

تكون علاقة من ص إلى س.

تعريف ٢-٣:

لتكن كل من س و ص مجموعة غير خالية، ولتكن ى ⊂ س × ص ≠ Φ وليكن (س*، ص*) ∈ ى فيقال للعنصر ص* في ص بأنه قيمة ى في س أو يقال أن ص* صورة س* بفعل ي.

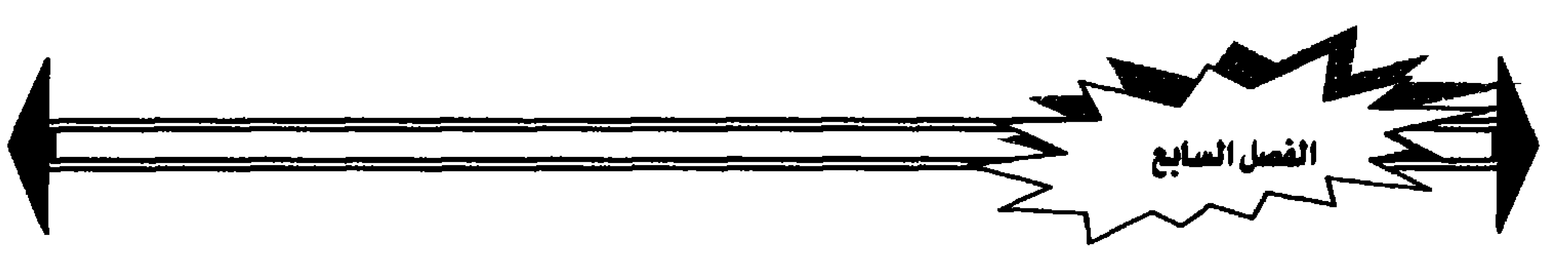
مثال (٤): لتكن كل من س و ص مجموعة كما في مثال (٢): فإن المجموعة:

ى = {(١، -١)، (١، ١)} ⊂ س × ص

تكون علاقة وأن قيمة ى في ١ هما العددان الصحيحان ١، -١ كما أنه من الملاحظ ليس كل عدد س* في س توجد قيمة إلى ى في س، مثلاً العدد ٢ عنصر ينتمي إلى س بينما لا توجد قيمة إلى ي في ٢.

٢-٢ الدالة Function:

في دراستنا المستقبلية سنهتم بنوع خاص من العلاقات من مجموعة معينة



إلى مجموعة أخرى إلى مجموعة أخرى معينة، وهذا النوع الخاص من العلاقة يدعى بالدالة.

تعريف ٢-٤:

لتكن كل من س و ص مجموعة غير خالية فيقال:

١- الثلاثي المرتب (س، ص ىٓ) دالة ىٓ ⊂ س × ص ≠ Φ بحيث لكل س* في س توجد قيمة واحدة فقط إلى ىٓ في س*.

٢- يرمز لهذا الثلاثي المرتب بالرمز ىٓ: س ⟵ ص أو س ⟵ىٓ⟵ ص فإن ىٓ : س ⟵ ص دالة ي علاقة من س إلى ص بحيث لكل س* في س توجد قيمة واحدة لـ ىٓ في س* ويرمز لهذه القيمة بالرمز ىٓ (س*).

٣- إذا كان ىٓ: س ⟵ ص دالة فإن ىٓ يدعى بيان الدالة و س منطلق الدالة و ص مستقرة الدالة.

٤- المجموعة {ىٓ(س*): س* ∋ س} والتي يرمز لها بالرمز ىٓ(س) تدعى مدى الدالة.

من الملاحظ في هذا التعريف أن ىٓ (س) ⊂ ص ≠ Φ ولتوضيح فكرة الدالة نأخذ الأمثلة التالية:

مثال (١): لتكن {وليد، صبا، ياسمين} = س و {أحمد، سيف} = ص ولتكن

{(وليد، أحمد)، (صبا، أحمد)، (ياسمين، سيف)} = ىٓ

فمن الواضح من الأمثلة السابقة أن ىٓ ⊂ س × ص ≠ Φ أي أن ىٓ



علاقة من س إلى ص وأن كل عنصر في س وهم: وليد، صبا، ياسمين يظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط، وهذه الأزواج هي (وليد، أحمد)، (صبا، أحمد)، (ياسمين، سيف) أي أن قيمة ي في وليد هي أحمد وقيمة ي في صبا هي أحمد وقيمة ي في ياسمين هي سيف، أي أن قيمة ي في س* تكون واحدة لكل س* ∈ س وبذلك فإن ي : س ⟵ ص : ي تمثل الدالة.

مثال (٢): لتكن كل من س و ص كما في المثال (١)، وأن:

{(وليد، أحمد)، (صبا، أحمد)، (وليد، سيف)، (ياسمين، سيف)} = هـ.

فإن هـ: س ⟵ ص لا تمثل دالة، وبالرغم من أن هـ علاقة من س إلى ص. لأن وليد، وهو كما نعلم عنصر في س، يظهر كإحداثي أول في زوجين مرتبين في هـ وهي

(وليد، أحمد) و(وليد، سيف) أي أن هـ لها قيمتين في وليد.

مثال (٣): لتكن س و ص كما في المثال (١) وأن:

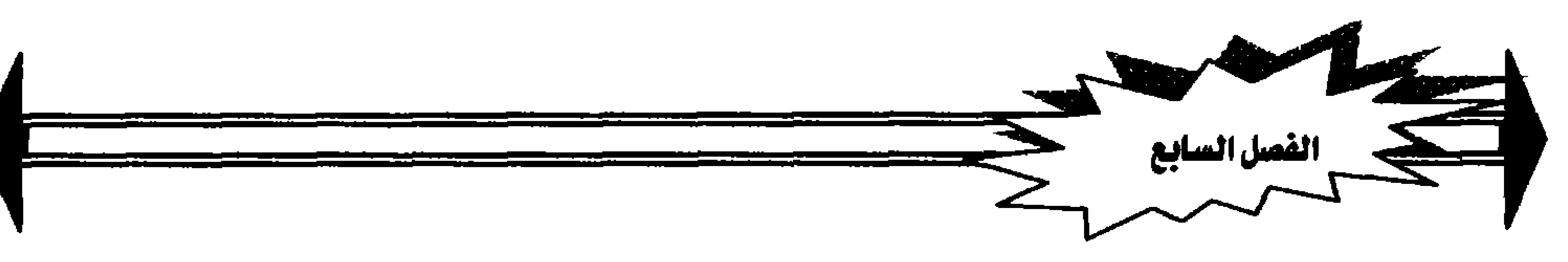
هـ* = {(أحمد، صبا)، (سيف، وليد)} فإن هـ* : س ⟵ ص لا تمثل دالة بالرغم من أن هـ* علاقة من س إلى ص لأن ياسمين عنصر في س لا تظهر كإحداثي أول في زوج مرتب في المجموعة هـ*، وهذا ينافي الشرط كون كل عنصر س* في س توجد قيمة واحدة لـ ي في س*.

مثال (٤): لتكن كل من س و ص مجموعة الأعداد الحقيقية: ولتكن:

ي = {(س*، س*٢) : س* ∈ س} ⊂ س × ص

بما أن كل عدد حقيقي س* يوجد عدد حقيقي واحد س* . س* = س*٢ (من تعريف عملية الضرب) فإن ي علاقة من س إلى ص كما أن





ى : س ⟵ ص تكون دالة. لأن كل س* في س يظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط في ي وهذا الزوج المرتب هو (س*، س*٢) وبذلك لكل س* في س توجد قيمة واحدة إلى ى في س* وهي س*٢ وهذه القيمة هي ى(س*) فعليه

ى : س ⟵ ص وأن ى كما معرفة سابقاً ستكون دالة. واعتيادياً تكتب هذه الدالة على النحو التالي:

ى : س ⟵ ص بحيث أن ى(س*) - س*٢ لكل س* ∋ س.

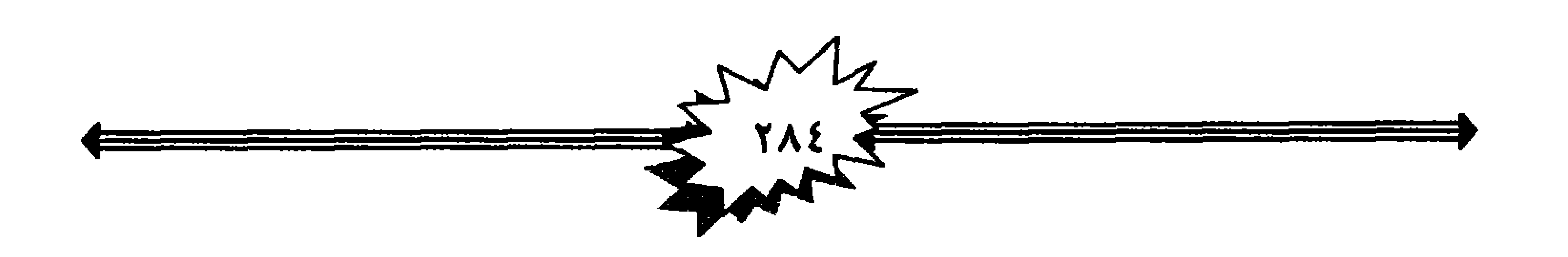
ويتضح مما سبق أن منطلق هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية وبدوره يكون مستقرها. غير أن المجموعة ى(س) = {ى(س*) = س*٢ : س* ∋ س} فتكون الأعداد الحقيقية الموجبة م الصفر، أي أن مدى هذه الدالة يكون المجموعة {ص* : ص*١ ≤ ٠}.

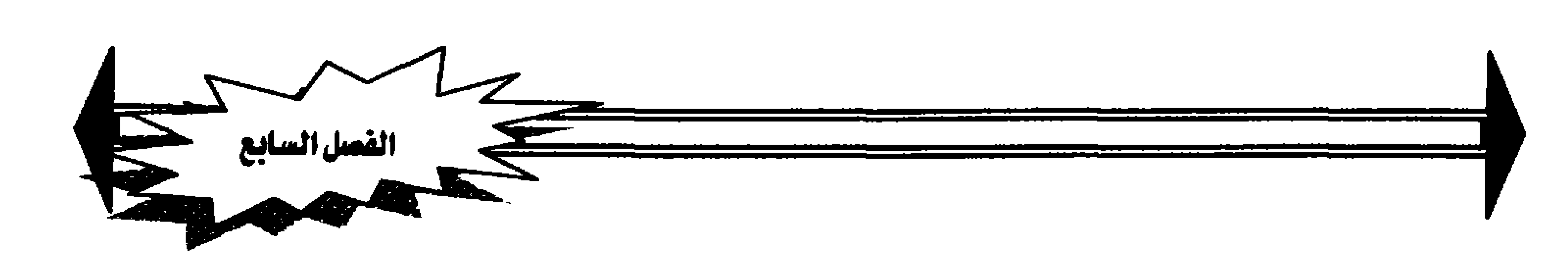
مثال (٥): لتكن لكل من س و ص مجموعة الأعداد الحقيقية في المجموعة:

ى = { (س*، $\sqrt{\text{س}^*}$) : س* ∋ س} ⊃ س × ص١

لا تمثل بيان دالة بالرغم من كونها علاقة من س إلى ص، لأن الأعداد الحقيقية السالبة لا توجد لها جذور تربيعية حقيقية (لا يوجد عدد حقيقي ﺃ بحيث ﺃ٢ = -ب حيث ب > ٠) بمعنى آخر لا توجد قيمة إلى ى في س* عندما س* < ٠، لذلك ليست كل الأعداد الحقيقية س* في س تظهر كإحداثي أول في زوج مرتب (س*، $\sqrt{\text{س}^*}$) لذا فإن ى : س ⟵ ص بحيث أن

ى(س*) = $\sqrt{\text{س}^*}$ لكل س* ∈ س لا تمثل دالة.





مثال (٦):

فلو أخذنا نفس المثال غير أن المجموعة س = {س* ∈ ح : س* ≤ ٠} فإن المجموعة تكون علاقة كما في مثال (٥) وكل عدد حقيقـي س* ∋ س، أي لكـل عدد حقيقي س* ≤ ٠ يوجد عدد حقيقي واحد $\sqrt{س^*}$، لذا فإن ى قيمة س* (عندما س* ≤ ٠) بفعل ى عدد حقيقي واحد هو ى(س*) الذي هـو $\sqrt{س^*}$ وبذلك ستكون ى* : س ⟵ ص بحيث أن ى(س*) = $\sqrt{س^*}$ لكـل س* ∋ س تمثل دالة حيث ى تمثل بيان الدالة، س منطلقهـا و ص مـستقرها. ويكـون بهذا الترتيب مدى هذه الدالة المجموعـة الجزئيـة مـن مجموعـة الأعـداد الحقيقيـة وهي:

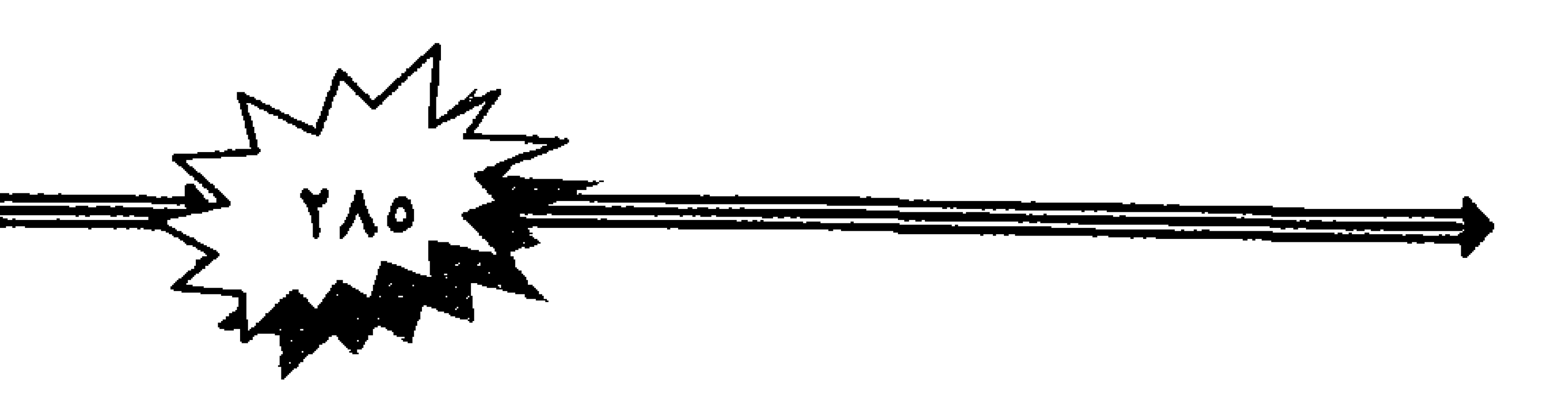
ى(س*) = { س* ∋ ح، س* ≤ ٠}.

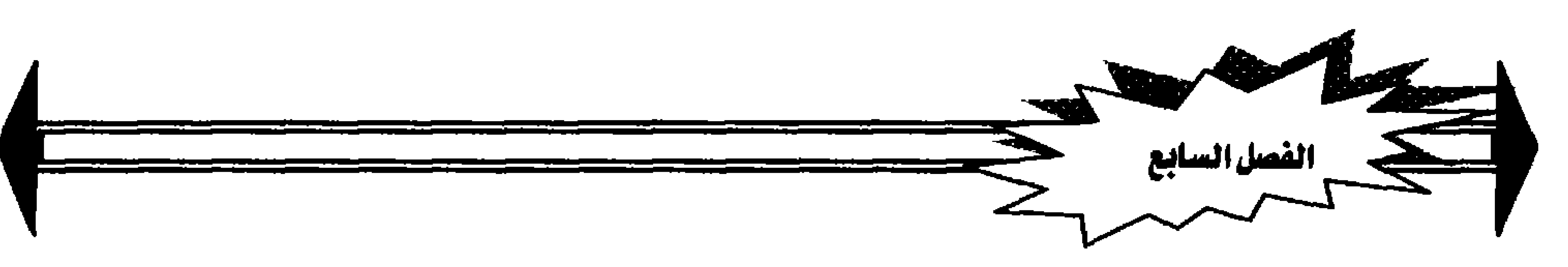
مثال (٧):

لتكن لـ من س و ص مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن

ى = {(س*، ١) : س* عـدد نـسبي} ∪ {(س*، ٢) : س* عـدد غـير نـسبي} مـن الواضـح أن كـل زوج مرتـب في المجموعـة ى يكـون عنـصراً في س × ص لذا فإن ى ⊃ س × ص ≠ Φ فعلية فإن ى تمثل علاقة مـن س إلى ص.

كل عدد حقيقي س* إما أن يكون نسبياً وإما أن يكون غير نسبياً، فلو كان س* عدداً حقيقياً غير نسبياً فإن س* تظهر كإحداثي أول في زوج مرتـب واحـد فقط وهو (س*، ٢) في ى لأن هذا الزوج المرتب (س*، ٢) كما تعلم يكون في المجموعة {(س*، ٢) : س* عدد غير نسبي} ولذلك فهو في ى. وبنفس الترتيب

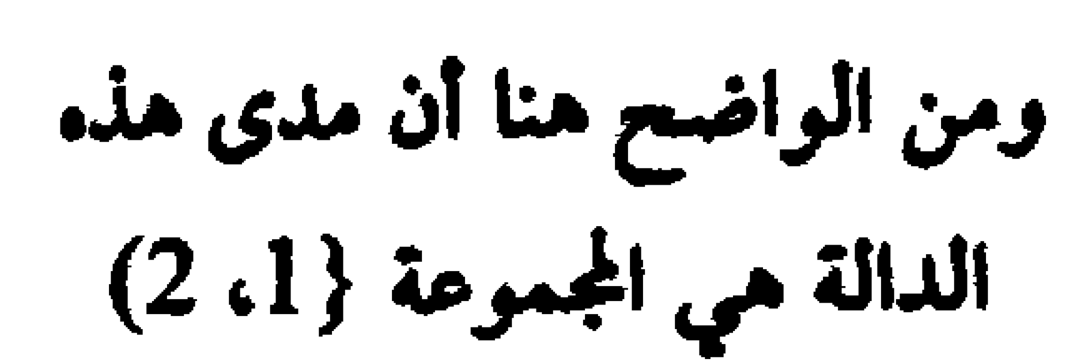


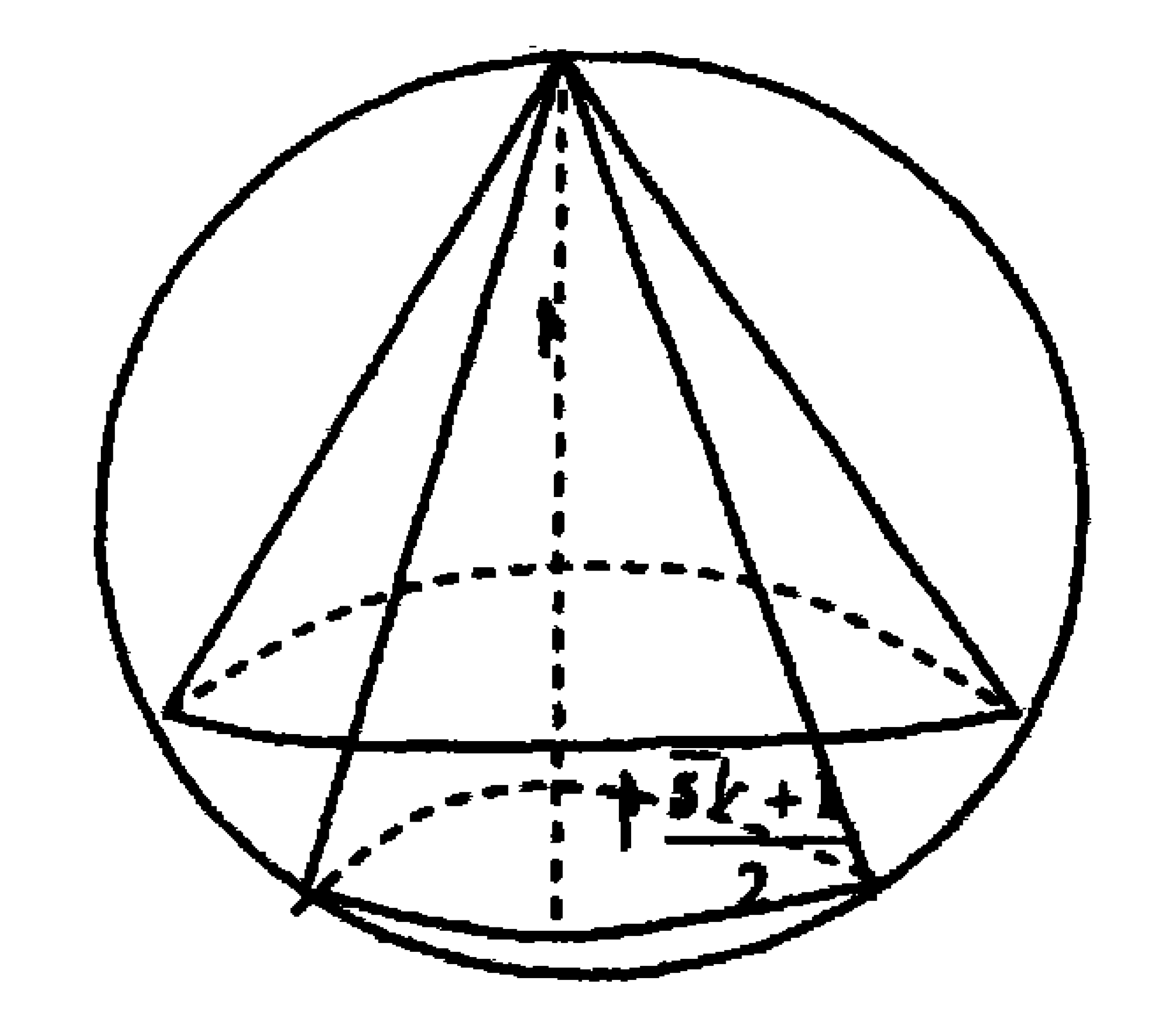


عندما يكون س* عدداً حقيقياً نسبياً، وكذا ولكل عدد حقيقي س* توجد قيمة واحدة إلى ى في س* وهذه القيمة هي ١ عندما تكون س* عدداً حقيقياً نسبياً وتكون ٢ عندما تكون س* عدداً حقيقياً غير نسبي، فتكون العلاقة ى من س إلى ص دالة من س إلى ص وكما تعودنا على كتابة الدالة فتكون:

ى : س ⟵ ص دالة بحيث أن

ى(س*) لكل س* في س = { ١، س* عدد نسبي
{ ٢، س* عدد غير نسبي

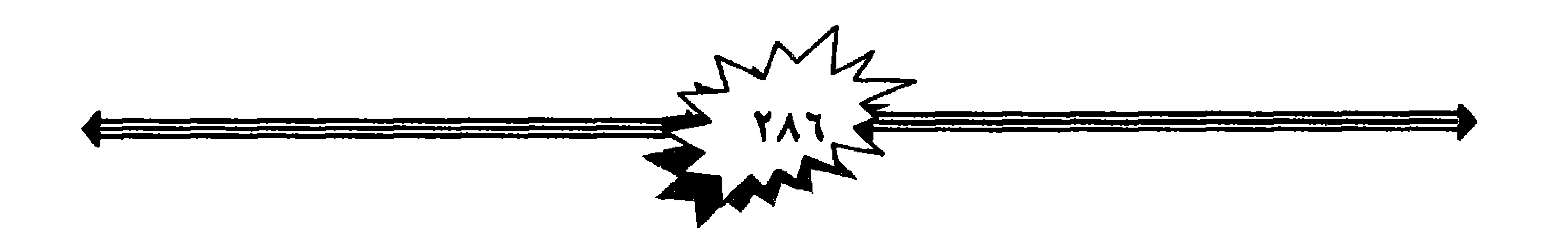

ومن الواضح هنا أن مدى هذه الدالة هي المجموعة {1، 2)

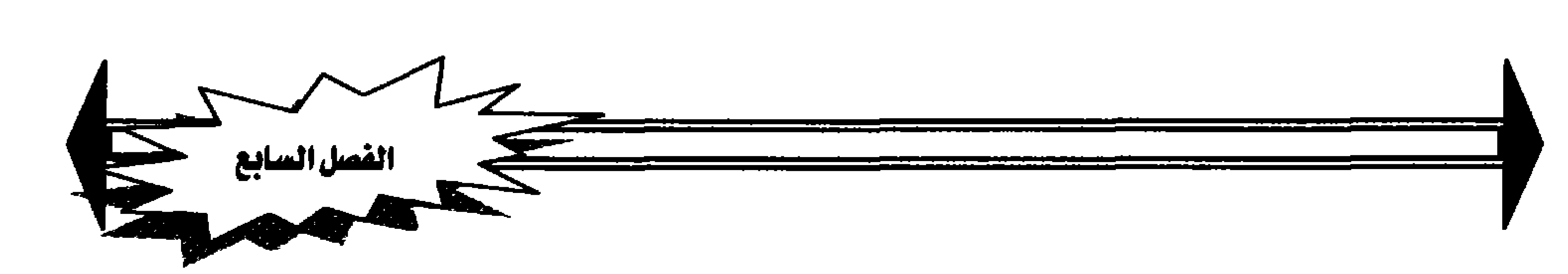


في الفصول القادمة ستصادفنا بعض الدوال التي نستنبطها من مسألة معينة، وذلك لإيجاد بعض الخواص أو بعض مطاليب معينة من هذه المسألة. وتوضيحاً لهذه الفكرة التي سنواجهها في مسائل عددية في الفصول القادمة. نجد من الأفضل وضع مثال توضيحي لهذه الأفكار.

مثال (٨):

كرة نصف قطرها ﻫ، رسم في داخلها مخروط قائم رأسه ومحيط قاعدته يقع على سطح هذه الكرة، كما في الشكل (٢-١). ما علاقة ارتفاع المخروط بحجمه؟





لإيجاد هذه العلاقة نعتمد على بعض الخواص الهندسية، فلو افترضنا أن ارتفاع المخروط أ ب يساوي عدداً حقيقياً س*، فنستطيع القول أن هذا العدد الحقيقي س* يكون ٠ ≤ س*≤ ٢ م. في المثلث القائم الزاوية م ن هـ، فإن م هـ يمثل بالعدد م و م ن يمثل بالعدد | س* - م| (وذلك بالإمكان كون النقطة بين أ و م) لذا فإن ن هـ يمثل بالعدد:

$\sqrt{م^2 - (س^* - م)^2} = \sqrt{س^* (٢م - س^*)}$ وبذلك يكون حجم المخروط مساوياً للعدد الحقيقي

$\frac{\pi}{3}$ س*² (٢ م – س*)، ولتكن س = { س* : ٠ ≤ س*≤ ٢ م} ⊂ س × ص.

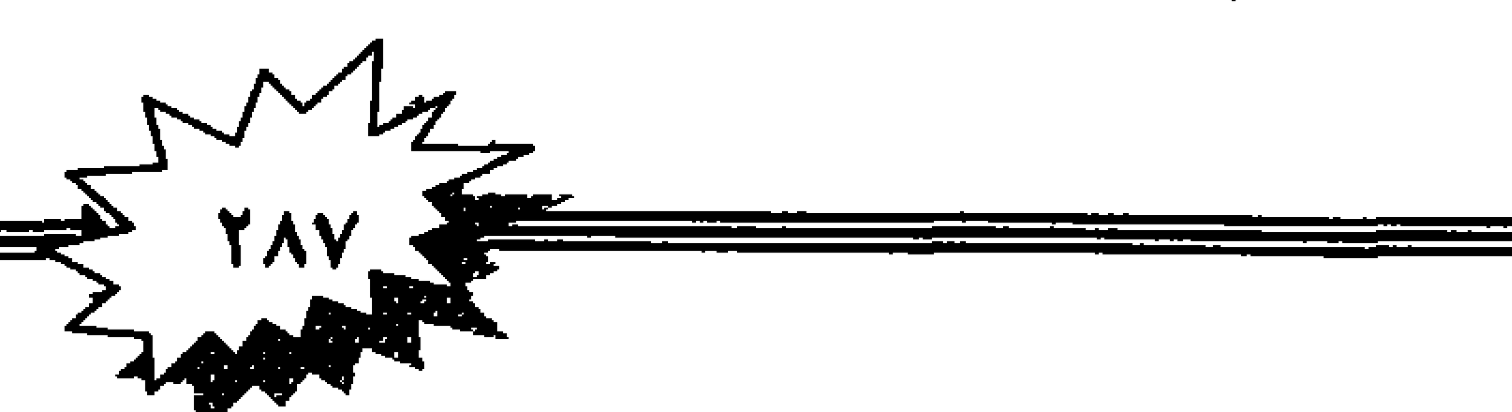
وتكون ق : س ⟵ ص حيث أن ق (س*) = $\frac{\pi}{3}$ س*² (٢ م – س*) لكل س* في س تمثل دالة، لأن كل س* في س توجد قيمة واحدة فقط إلى ق في س*، فمثلاً قيمة ق في م تساوي $\frac{\pi}{3}$ م³ لأن $\frac{\pi}{3}$ م³ = $\frac{\pi}{3}$ م² (٢ م – م) = ق(م) وسوف نترك للطالب إيجاد كل من ق($\frac{م}{2}$) وق($\frac{٢م}{3}$) وق($\frac{٤م}{3}$)

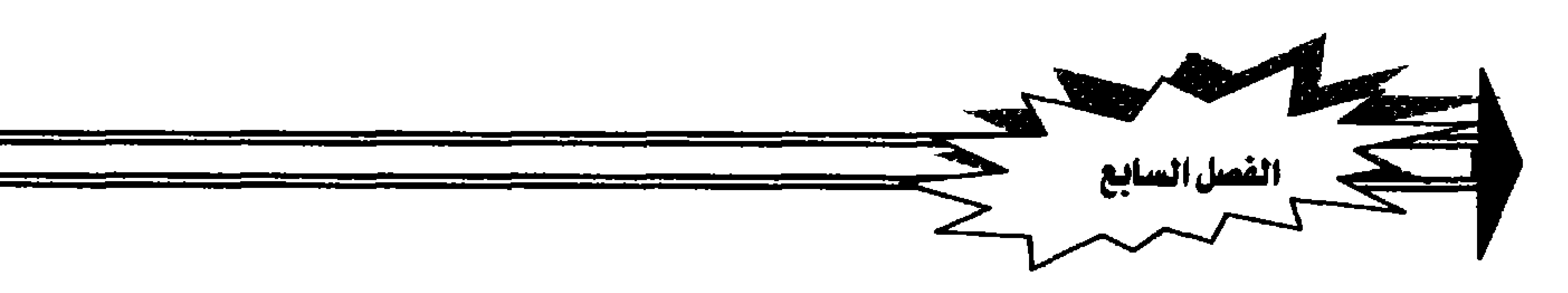
(تمارين):

١- لتكن أ = { م، ب} ب = {٢، ٣} جـ = {١، ٢}
جد المجموعة أ × (ب ∪ جـ) (أ × ب) ∪ (أ × جـ)

٢- لتكن كل من أ، ب، جـ مجموعة برهن أ × (ب ∪ جـ) = (أ × ب) ∪ (أ × جـ)

أ × (ب ∩ جـ) = (أ × ب) ∩ (أ × جـ)





٣- لتكن أ = {١، ٢، ٣} ولتكن ب = {١، ٣، ٥} جد العلاقة ق من أ إلى ب، بحيث (أ، ب*) ∋ ق ⇔ ب > أ.

٤- لتكن كل من أ و ب مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن ق = {(أ*، ب*) : أ + ٢ب* = ١٢} ⊂ أ × ب ، فكم عنصر تحتوي العلاقة ق من أ إلى ب؟ وما هي هذه العناصر؟

٥- لتكن س = {١، ٢، ٣، ٤} فأي مما يلي تكون دالة؟ ولماذا؟

أ- ق = {(٢، ٣)، (١، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٢)، (٤، ٤)}.

ب- هـ = {(٣، ١)، (٤، ٢)، (١، ١)}.

جـ - هـ* = {(٢، ١)، (٣، ٤)، (١، ٤)، (٢، ١)، (٤، ٤)}..

د- ك = {(١، ٤)، (٢، ٤)، (٣، ٤)، (٤، ٤)}، ولتكن س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، لتكن فأوجد قيم ما يلي:

هـ (ق(٣))، ق(هـ(٣^٣))، هـ (٢)، هـ(٤)، هـ(٣)، ق(٢)، هـ(ق(٤)) ق(٥)) ق(هـ(٢) + ٣(٣)).

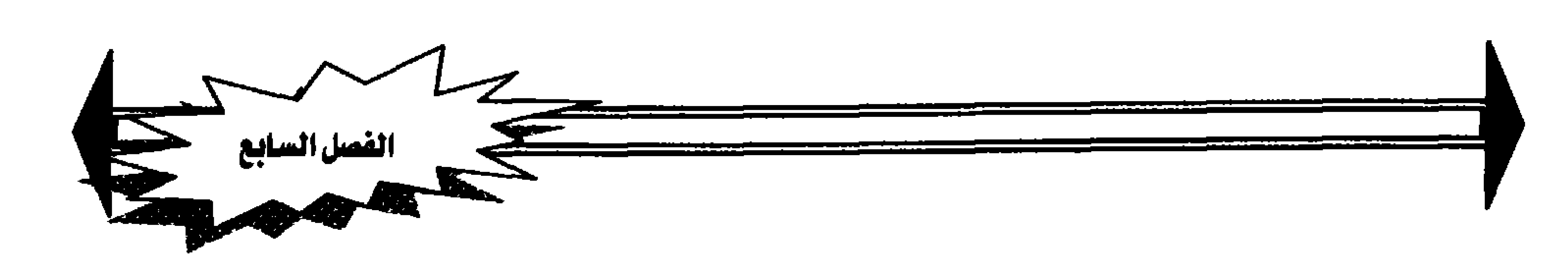
٦- لتكن س = {١، ٢، ٣} فأوجد جميع الدوال ق: س ⟵ س الممكنة.

٧- لتكن س = {١، ٢، ٣} ولتكن ص = {-١، ٠} أوجد جميع الدوال ق: س ⟵ ص الممكنة.

٢-٣ تصنيف خاص للدوال:

هناك تصنيف معين للدوال غير أن أهمها وربما يكون أكثرها فعالية وهي المساواة.





تعريف ٢-٥:

لتكن كل من ق: س ⟵ ص و هـ: س ⟵ ص دالة فيقال أن هاتين الدالتين. متساويتان ق(س) = هـ(س) لكل س* في س ويرمز لهذا التعبير ق = هـ (لأن من الواضح أن لهما نفس المجال ونفس المدى).

لذا ق = هـ ⇔ ق(س) = هـ (س) لكل س* ∈ س.

ربما توجد هناك بعض الدوال لها نفس العمل غير أن مجالاتها تختلف، وهل يمكن القول أن هذه الدوال متساوية أم لا؟ وللإجابة عن هذا نعطي التعريف التالي الذي سيوضح الفكرة.

تعريف ٢-٦: لتكن كل من ق : س ⟵ ص و هـ: أ ⟵ صَ دالة وأن أ ⊂ س ≠ Φ بحيث ق (س*) = هـ (س*) لكل س* في أ.

فيقال أن الدالة هـ: أ ⟵ صَ تحديد restriction للدالة ق : س ⟵ ص على المجموعة الجزئية أ، ويرمز إلى هـ في بعض الأحيان ق|أ لذا فإن هـ = ق|أ : أ ⟵ تكون دالة.

والآن لو قلنا إذا كانت ق : س ⟵ ص دالة و أ ⊂ س، فهل توجد دالة من أ إلى ص؟ فالجواب طبيعي نعم وهي تحديد هذه الدالة على أ أي ق|أ : أ ⟵ ص والسؤال الذي يتبادر إلى الذهن، هل توجد دالة واحدة فقط إما تكون أكثر من واحدة لها نفس الخاصية؟ فالجوات توجد دالة واحدة فقط لكن البرهان سيترك للقارئ لبساطته وما هو إلا تطبيق للتعريف أعلاه. وبذلك يمكن أن تصاغ على شكل النظرية التالية:





نظرية٢-٧:

إذا كانت ق: س ⟵ ص دالة وأن أ ⊃ س ≠ Φ فتوجد دالة واحدة فقط ق|أ: س ⟵ ص تحديد للدالة ق على المجموعة الجزئية أ. هناك سلوكية معينة لبعض الدوال، وسوف نعلق أسماء معينة اعتماداً على هذه السلوكية، وذلك اختصاراً لذكر شروط هذه السلوكية، ومن هذه الأنواع التي ستصادفنا عند دراستنا هي:

تعريف٢-٨: لتكن ق : س ⟵ ص دالة فيقال أن هذه الدالة متباينة indective (one – one) ⇔ لكل س*، ص* ∈ س و س* ≠ ص* فإن ق(س*) ≠ ق(ص*)

شاملة surdective (one to) ⇔

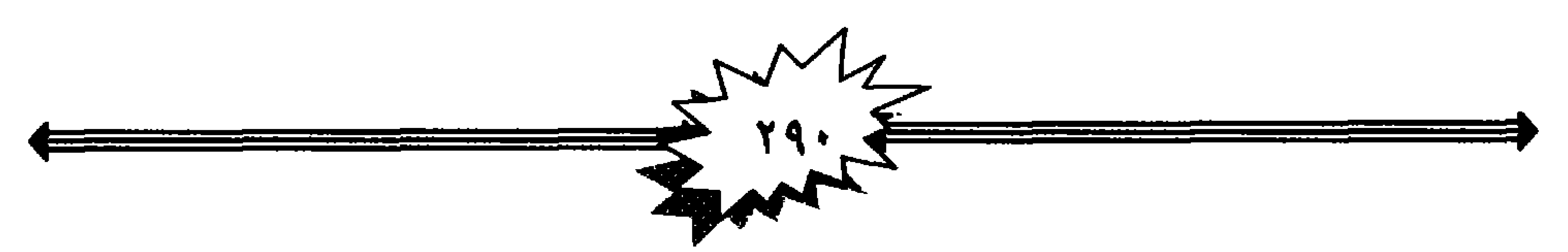
لكل ص* ∈ص يوجد س* ∈س بحيث ص* =ق(س*) وق(س*) = ص

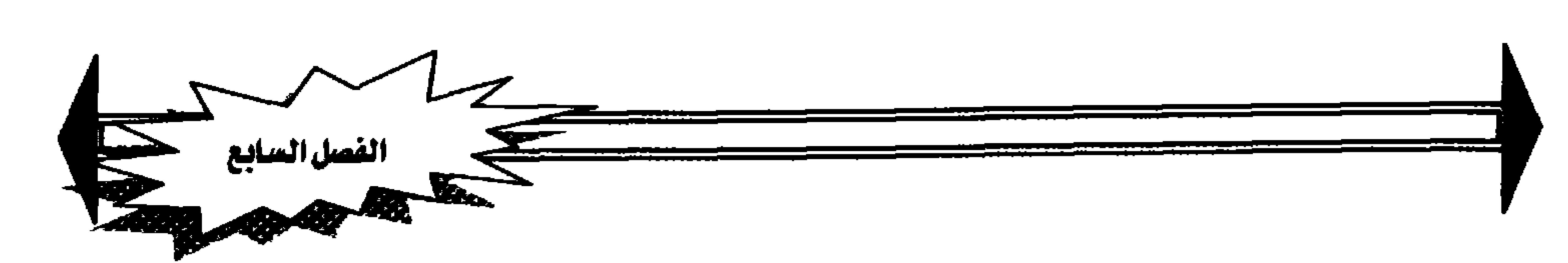
متقابلة bidective (one – one and onto):

عندما تكون الدالة متباينة وشاملة، وضعنا تعريفين للدوال المتباينة والدوال الشاملة، غير أن التعريفين متكافئان، ولكن تكافؤ هذين التعريفين سيترك برهنه للقارئ كتمرين خاص.

لو تفحصنا الدالة في مثال (١) في البند السابق، فإنها ستكون شاملة لأن كل عنصر ص* في ص يوجد عنصر س* في س بحيث ص = ق(س*) أو نستطيع القول أن:

ص = {أحمد، سيف} = {ق(ياسمين)، ق(صبا)، ق(وليد)} = ق(س) غير أن هذه الدالة غير متباينة، لأن ق(صبا) = أحمد و ق(وليد) =





أحمد غير أن صبا ≠ وليد وعليه فإن هذه الدالة لا تكون متقابلة.

أما في مثال (٤) في البند السابق، نعلم أن كل من س و ص مجموعة الأعداد الحقيقية و ى:س ⟵ ص دالة بحيث ى(س*) = س*٢ لكل س* في س.

لنأخذ أ ∈ س بحيث أ > ٠، فإن أ ≠ -أ غير أن ى(أ) = ى(-أ) = أ٢ فعليه، فإن هذه الدالة غير متباينة، ولو أخذنا ب∈ ص بحيث أن ب > ٠ فلا يوجد عدداً حقيقياً أ بحيث

٠ > ب = أ٢ = ى(أ) وهذا ينفي كون الدالة شاملة.

أما ما جاء عن الدالة في المثال (٦) في البند السابق، فإن ى(س) ≠ ص لذا فإنها غير شاملة ولو كان ى(س*) = ى(ص*) إذا س* = ص* فإن س* = ص* لكل عددين حقيقين س*، ص*

فعليه تكون هذه الدالة متباينة.

والدالة في المثال (٧) في البند السابق، سنترك برهان هذه الدالة ليست شاملة، وغير متباينة تمرين للقارئ، لاختبار مدى استيعابه لهذا المفهوم.

أما الدالة في المثال (٨) في البند السابق، هي ى: س ⟵ ص حيث أن: ى(س*) = $\frac{\pi}{٣}$س*٢ (٢أ - س*) لكل س* في المجموعة س = {س* ∈ ح : ٠ ≤ س* ≤ ٢أ } وأن ص مجموعة الأعداد الحقيقية.

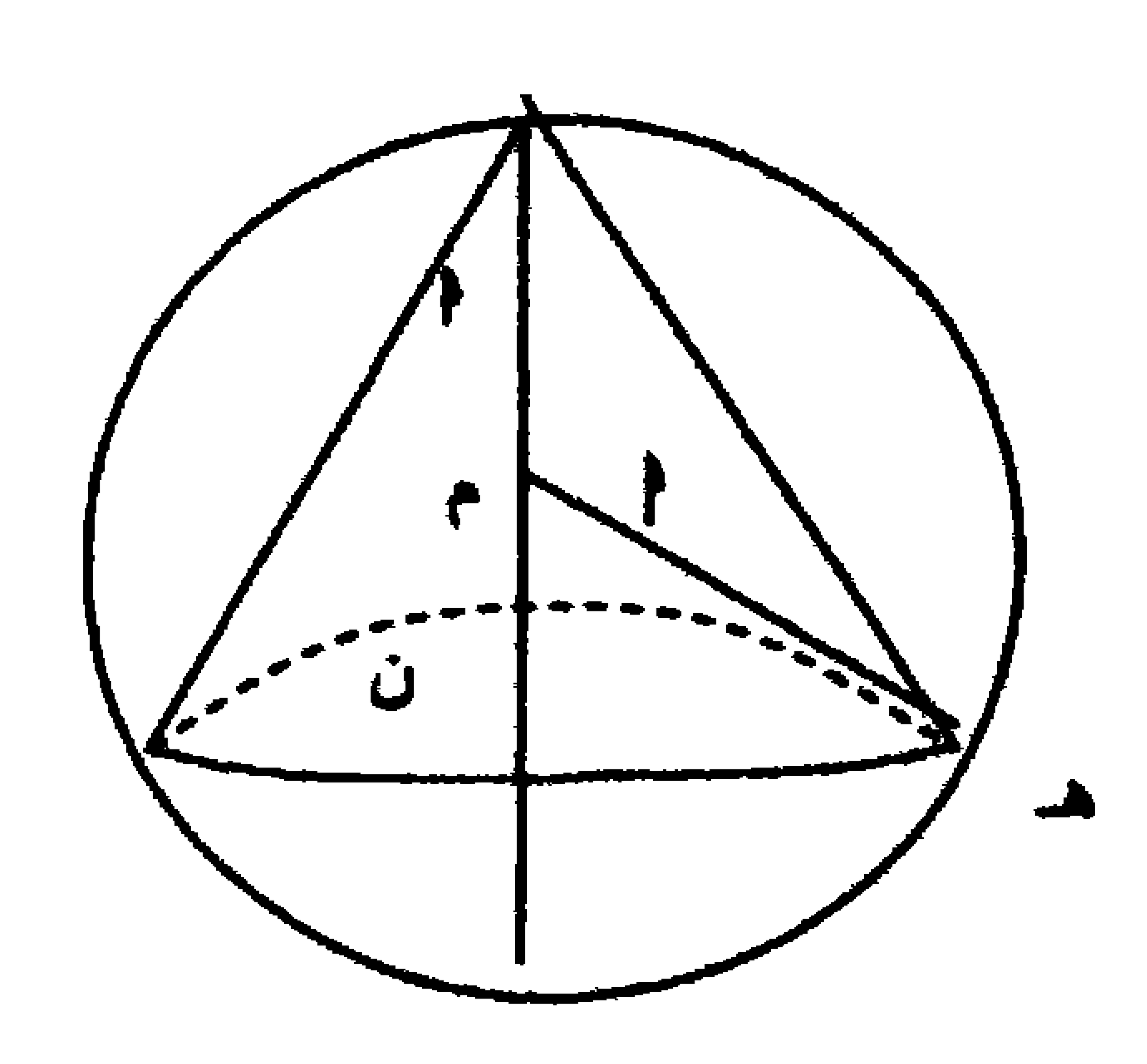
ولو جردنا هذه الدالة عن صيغتها الهندسية، نلاحظ أن الأعداد السالبة لا



تكون في مدى هذه الدالة، لأن ($\text{٢أ} - \text{س}^*$) و س^{*2} و $\frac{\pi}{\text{٣}}$ أعداد حقيقية موجبة أو صفر لكل $\text{٠} \le \text{س}^* \le \text{٢أ}$ لذا فإن $\text{ق(س)} \ne \text{ص}$ وبالتالي فإن هـذه الدالـة لا تكون شاملة، فعليه لا تكون متقابلة.

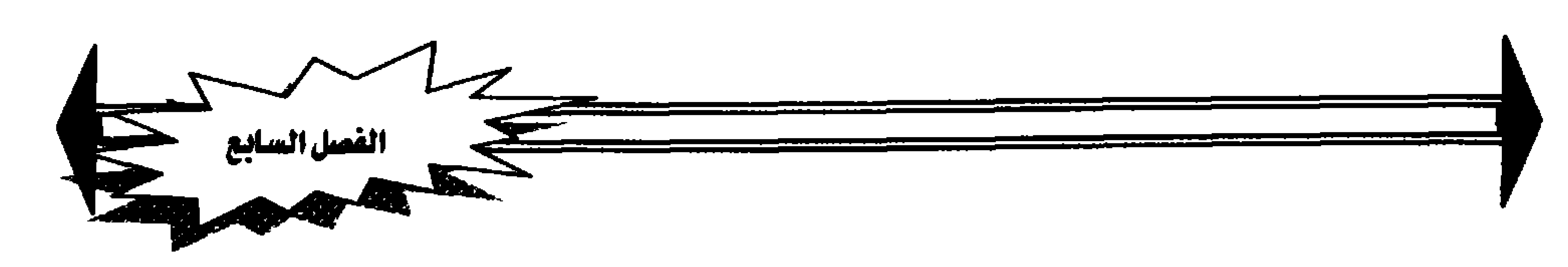
نعلم أن أ و $\frac{\text{١} + \sqrt{\text{٥}}\,\text{أ}}{\text{٢}}$ عددان حقيقيان وأن $\text{٠} \le \text{أ} < \frac{\text{أ}(\text{١} + \sqrt{\text{٥}})}{\text{٢}} \le \text{٢أ}$ وأن $\text{ق(أ)} = \text{ق}\left(\frac{\text{أ}(\text{١} + \sqrt{\text{٥}})}{\text{٢}}\right) = \frac{\pi}{\text{٣}}\,\text{أ}^{\text{٣}}$ لذا فإن هذه الدالة غير متباينة.

أما الخلفية لهـذا المفهـوم، وجـود مخـروطين أحـدهما ارتفاعـه أ والآخـر ارتفاعه $\frac{\text{أ}(\text{١} + \sqrt{\text{٥}})}{\text{٢}}$ ولهما نفس الحجم، كما هو في الشكل (٢-٢)



٢-٤ الدوال العددية:

من الآن وصاعداً سنهتم بنوع خاص من الدوال وسـنطلق عليهـا الـدوال العددية، لأن الأعداد الحقيقية حسب ما تعلمنا في الفصل الأول يمكـن التعامـل بها وحسابها. ومن أنواعها الـدوال الـواردة في الأمثلـة (٤)، (٦)، (٧)، (٨) في البند ٢-٢:



تعريف ٢-٩:

لتكن ى: س ⟵ ص دالة فيقال أن هذه الدالة عددية مجالها ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الفصل الأول نظام الأعداد الحقيقية وشاهدنا وجود عمليتين ثنائية وهما عمليتا الجمع والضرب ويمكن الحصول على عمليتين ثنائية وهما الطرح، والقسمة. وكما نعلم أن الدوال ليست أعداد ولكنها تسلك سلوكية الأعداد حيث يمكن جمعها وضربها كما سنشاهد ذلك.

لتكن س مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح (هنا أهملنا الإرشادات للعمليات الثنائية وإشارة الترتيب) والتي تكون حقلاً مرتباً تاماً. فيوجد هناك دالة ى: س ⟵ ح بحيث ى(س*) = جـ لكل س* ∈ س حيث جـ عدداً حقيقياً، فلو أخذنا مجموعة الدوال من س إلى ح فستكون مجموعة غير خالية ويرمز اعتيادياً لهذه المجموعة بالرمز ح$^{+}$ وكل عنصر في هذه المجموعة تكون دالة من س إلى ح وبما أن المجال والمدى واضح فسنقرر بتسمية عناصر هذه المجموعة ببيان الدالة.

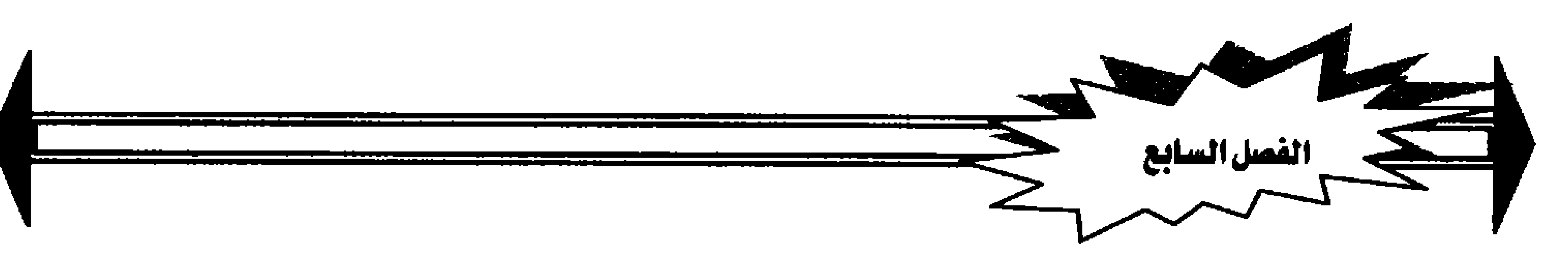
تعريف٢-١٠ : لتكن س مجموعة غير خالية من ح فإن ح$^{+}$ تعني المجموعة

{ى: س ⟵ ح}.

نظرية٢-١١ : لتكن العملية . بين كل عنصرين في المجموعة ح$^{+}$ بحيث

هـ(س*) + ى(س*) = ى(⊕ هـ) (س*) لكل س* في س ولكل ى و هـ في ح$^{+}$ فإن (ح$^{+}$، ⊕) تكون زمرة تبديلية.





البرهان: ربما يبدو اصطلاح زمرة تبديلية غريبة على القارئ، ولكن سيتوضح معنى هذا التعبير من سياق البرهنة.

لتكن ق ، هـ ∈ ح$^{+}$ فتكون كل من ق: س ⟵ ح و هـ : س ⟵ ح دالة أي يوجد عدد واحد ق(س*) وعدد واحد هو هـ(س*) لكل س* في س، لذا فيوجد عدد واحد

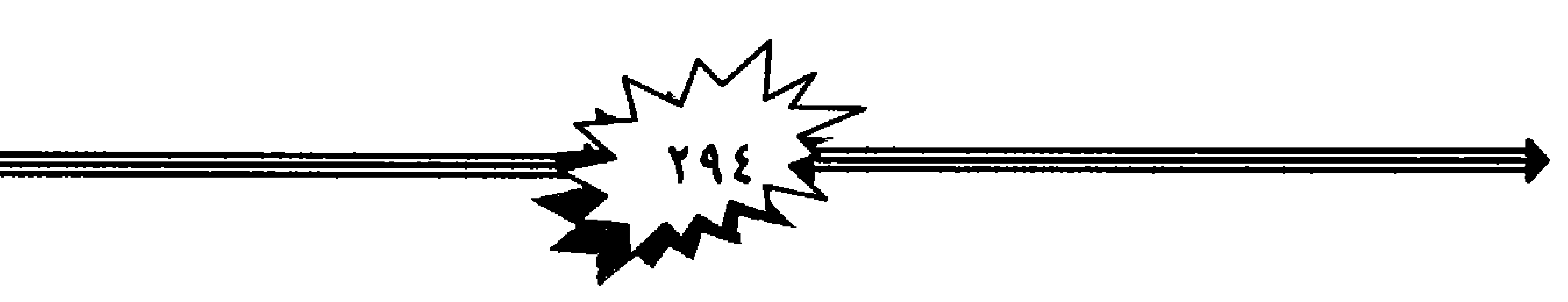
ق(س*) + هـ(س*) لكل س* في س. فتكون ق⊕ هـ : س ⟵ ح دالة لأن

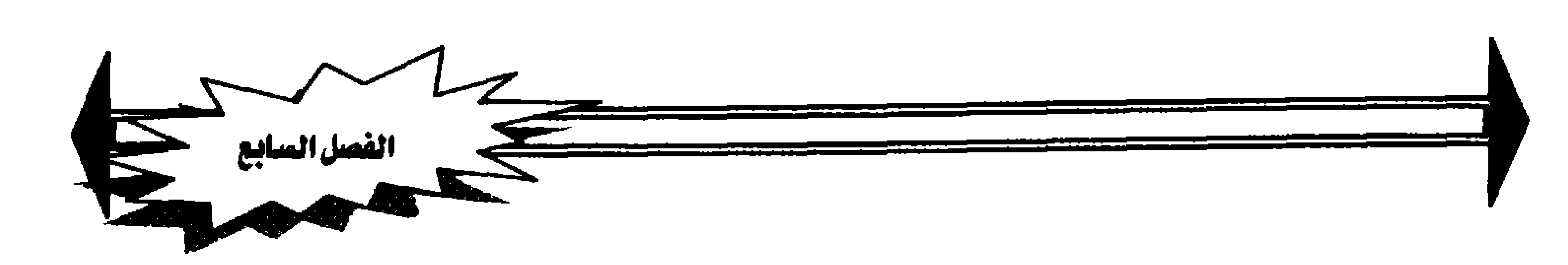
ق(س*) + هـ (س*) = (ق⊕ هـ) (س*) في س.

وبعبارة أخرى: إذا كان ق، هـ ∈ ح$^{+}$ وهذا إثبات الخاصية لإغلاق للعملية ⊕ لتكن كل من ق، هـ، هـ* عنصر في ح$^{+}$ فيكون من خاصية الإغلاق أن كل من ق⊕ هـ و هـ⊕ هـ* عنصر في المجموعة ح$^{+}$ وحسب خاصية الإغلاق سيكون كل من (ق⊕ هـ) ⊕ هـ* و ق⊕ (هـ⊕هـ*) عنصر في المجموعة ح$^{+}$ أيضاً، والسؤال هل سيكون كل منهما يمثل نفس العنصر في ح$^{+}$ أم لا؟

ونعلم من تعريف ٢-٥ أنهما يكونان نفس العنصر أي متساويان إذا كان ((ق⊕ هـ) ⊕هـ*) (س*) = (ق⊕ (هـ⊕هـ*)) (س*) لكل س* في س.

ولبرهنة هذه الخاصية نتبع الخطوات التالية: لكل س* في س يكون من تعريف العملية من تعريف العملية (ق⊕ (هـ⊕هـ*)) (س*) = ق(س*) + (هـ ⊕ هـ*) (س*) ⊕ في المجموعة ح$^{+}$ = ق(س*) + هـ(س*) + هـ*(س*)).





خاصية التجميع في الأعداد الحقيقية:

= (و(س*) + هـ(س*)) + هـ*(س*) = (و⊕ هـ) (س*) + هـ*(س)

وذلك من تعريف العملية ⊕ في المجموعة ح = ((و⊕ هـ) ⊕ هـ*) (س*)

وهذا برهان الخاصية النظير للإشارة ⊕.

ليكن كل من و و هـ عنصر في ح+ فإن لكل س* في س يكون

من تعريف العملية ⊕

و(⊕ هـ) (س*) = و(س*) + هـ(س*)

من خواص الأعداد الحقيقية = و(س*) + هـ(س*)

من تعريف العملية ⊕ = (هـ⊕ و) (س*)

إذاً و⊕ هـ = هـ ⊕ و وهذا إثبات لخاصية التبديلية للعملية ⊕.

إذاً الخواص (الإغلاق، التجميع، التحايد، النظير، التبديلية) تحقق فإن (ح+، ⊕) تكون زمرة تبديلية.

هنا يمكن إبدال العملية ⊕ و Θ بإشارتي الجمع والطرح كما في الأعداد ويكن التعريف على هذا الأساس (و + هـ) (س*) = و(س*) + هـ(س*)

(-و) (س*)= -و(س*) لكل س* في س.

وربما تكون هذه الصورة أوضح، ولكن تجنبنا هذا لأنها ليس نفس العملية غير أنهما لهم نفس السلوكية، وبذلك تكون عملية الطرح كما يلي و − هـ = و + (-هـ) في النظرية القادمة سنعطي نفس العملية الثنائية للأعداد الحقيقية والدوال، غير أن القارئ يجب أن يميز الاختلاف بينهما.



نظرية٢-١٢:

لتكن العملية · بين كل عنصرين في المجموعة ح$^{+}$ بحيث (ق · هـ) (س*) = ق(س*). هـ(س*) لكل س* في س ولكل ق و هـ في ح$^{+}$. فإن (ح$^{+}$، ·) تكون نصف زمرة تبديلية مع عنصر التحايد.

البرهان:

لتكن هـ ∈ ح$^{+}$ وق فإن كل من ق : س ⟵ ح و هـ : س⟵ ح دالة لكل س* في س يوجد عدد حقيقي واحد ق(س*) وعدد حقيقي واحد هو (س*) لذا فلكل س* في س يوجد عدد حقيقي واحد ق(س*) · هـ(س*) فعليه تكون (ق · هـ) : س ⟵ ح دالة عددية وذلك باستخدام الشرط (ق · هـ) (س*) = ق(س*) · هـ(س*) لكل س* في س.

إذاً ق · هـ يكون عنصراً في المجموعة ح$^{+}$ وهذا يثبت خاصية الإغلاق للعملية. لتكن ق، هـ، هـ* ∈ ح$^{+}$، حسب خاصية الإغلاق تكون كل من ق . هـ و هـ . هـ* عنصراً في المجموعة ح$^{+}$ ولنفس السبب تكول كل من ق . (هـ . هـ*) و (ق . هـ) . هـ* عنصراً في المجموعة ح$^{+}$، نعلم أن كل س* في س يكون حسب خاصية العملية:

ق . (هـ . هـ*)) (س*) = ق(س*) . (هـ . هـ*) (س*)

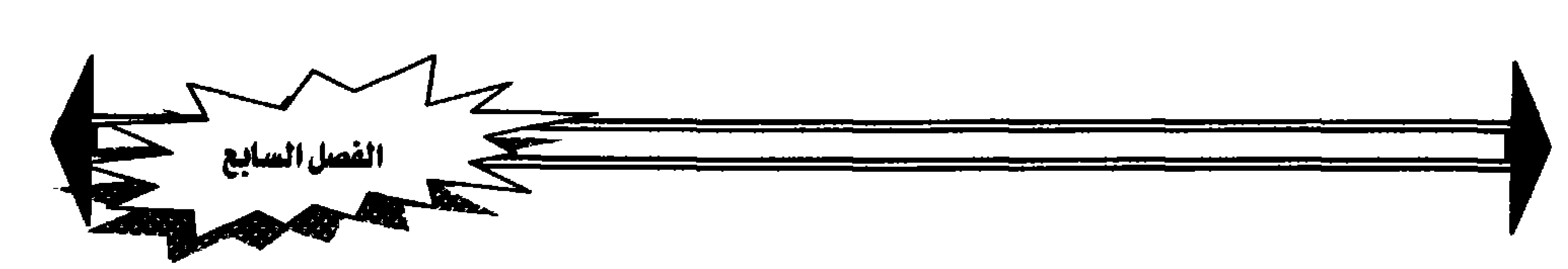
= ق(س*) . (هـ(س*) . هـ*(س*)).

خاصية الأعداد الحقيقية = (ق(س*) . هـ(س*)) . هـ*(س*).

حسب خاصية العميلة = (ق . هـ) (س*) . هـ* (س*)

= ((ق . هـ) . هـ*) (س*)





إذاً ن . (هـ . هـ*) = (ن . هـ) . هـ* وهـذا يثبـت خاصـية التجميـع للعملية.

لتكن ل* : س ⟵ ح بحيث أن ل* (س*) = ١ لكل س* ∈ س.

فتكون ل* : س ⟵ ح دالة، فعليه ل* ∈ ح*

ليكن ن عنصر في المجموعة ح+، فلكل س* في س يكون

من تعريف العملية = (ن . ل*) (س*) = ن (س*) . ل* (س*)

من تعريف ل* = ن (س*) . ١

من خواص الأعداد الحقيقية = ن(س*)

من خواص الأعداد الحقيقية = ١ . ن(س*)

من تعريف ل* = ل* (س*) . ن(س*)

من تعريف العملية (ل* . ن) (س*)

إذاً ن . ل* = ل* . ن = ن وهذا يثبت خاصية التحايد للعملية لـيكن كل من ن، هـ عنصراً في المجموعة ح* فإن كل من ن.هـ و هـ.ن عنـصراً في ح*حسب خاصية الإغلاق. نعلم أن لكل س* في س يكون:

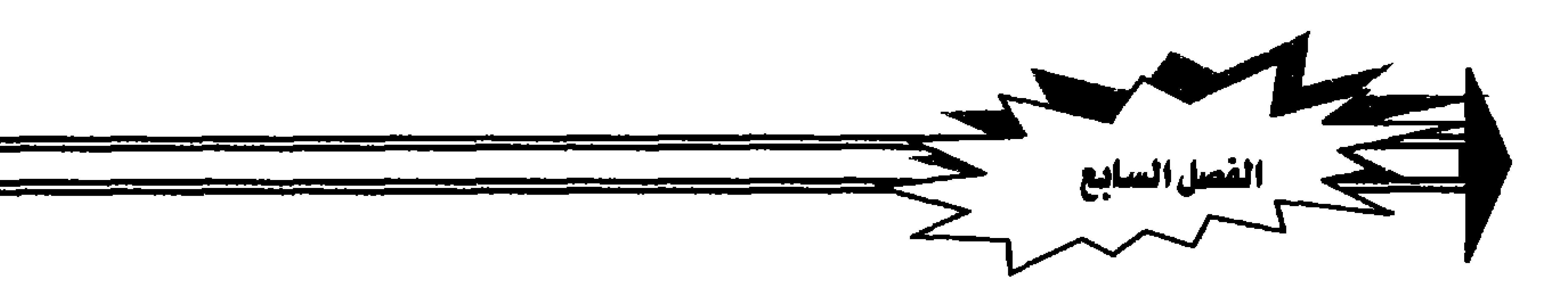
من تعريف العملية = (ن . هـ) (س*) = ن (س*) . هـ (س*)

من خواص الأعداد الحقيقية = هـ (س*) . ن(س*)

من تعريف العملية (هـ . ن) (س*)

إذاً ن . هـ = هـ . ن وهذا يثبت الخاصية التبديلية للعملية.

لذا فإن (ح*، ٠) يكون نصف زمرة تبديلية مع العنصر المحايد ل*.



نظرية ٢-١٣: لتكن العمليتين + ، ٠ بين كل عنصرين من المجموعة ح⁺ بحيث

(ى + هـ) (س*) = ى (س*) + هـ (س*) لكل س* في س.

(ى . هـ) (س*) = ى (س*) . هـ (س*)

فإن (ح*، +، ٠) تكون حلقة إبدالية تحتوي على العنصر المحايد.

البرهان:

حسب النظرية ٢-١١ (حس، +) زمرة تبديلية، وحسب نظرية ٢-١٢ يكون (حس، +) نصف زمرة تبديلية مع العنصر المحايد. فلتكملة البرهان نحتاج إلى برهان خاصية التوزيع فقط أي أن ى . (هـ + هـ*) = ى . هـ + ى . هـ* لكل ى، هـ، هـ* في المجموعة حس.

بما أن ى . هـ ، ى . هـ* عناصر في حس فيكون أيضاً كل من ى . هـ* + ى . هـ و ى.(هـ + هـ*) عنصر في حس لكل س* في س يكون:

من تعريف العملية ⟸ (ى(هـ +هـ*)) (س*) = ى (س*). (هـ . هـ*) (س*)

من تعريف العملية ⟸ ى (س*) . (هـ (س*) + هـ*((س*)).

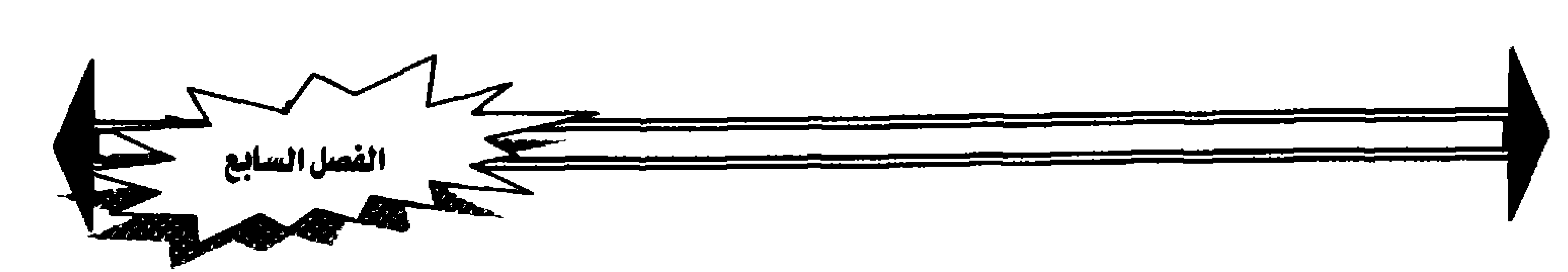
من خواص الأعداد الحقيقية ⟸ ى(س*) . هـ (س*) + ى (س*) . هـ*(س*)

من تعريف العملية ⟸ (ى . هـ) (س*) + (ى . هـ*) (س*)

من تعريف العملية ⟸ (ى . هـ + ى . هـ*) (س*)

وبهذا يكون (حس، +، ٠) حلقة تبديلية وتحتوي على العنصر المحايد وهو ل*.





تعريف ٢-١٤: ليكن ر* عنصراً في المجموعة ح^س بحيث ر*(س*) = ر* لكل س* في س فنقول أن ر* : س ⟵ ح دالة عددية ثابتة Constant Function.

تكون الدالة ل*: س ⟵ ح دالة عددية ثابتة، والدالة و*: س ⟵ ح دالة عددية ثابتة.

نظرية٢-١٥:

ح^س يكوّن فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية.

البرهان: نعني أن ح^س يكون فضاء متجهات Vector Space فوق حقل الأعداد الحقيقية ح بأن (ح^س ، +) زمرة تبديلية، وتوجد عملية الضرب (تدعى الضرب المقياسي Scadar product) والمعرفة كما يلي ر*.ق في المجموعة ح^س*

بحيث ر* عدد حقيقي و ق في ح^س* وان (ر* . ق) (س*) = ر* . ق(س*) لكل س* في س.

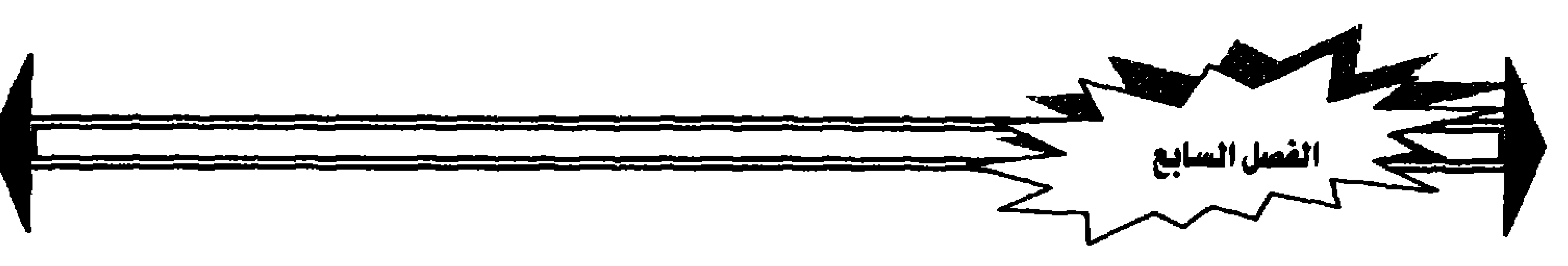
(الطرف الأيمن عملية ضرب أعداد حقيقية). وتحقق شروط معينة والتي ستبرهن تحقيقها مباشرة، لكل س* في س يكون ر* . (ق + هـ) (س*) = ر (ق + هـ) (س*) = ر*(ق(س*) + هـ(س*)).

= ر* ق (س*) + ر* هـ(س*) = (ر*. ق) (س*) + (ر*. هـ) (س*).

= (ر* . ق + ر* . هـ) (س*)

إذاً (١) ر* (ق + هـ) = ر* . ق + ر* . هـ لكل ق، هـ ∋ ح لكل س* في س





يكـــون: ((ر* + ﻫ) . ﻕ) (س*) = (ر* + ﻫ) ﻕ(س*) = ر* ﻕ(س*) + ﻫﻕ(س*)

= (ر* . ﻕ) (س*) + (ﻫ . ﻕ) (س*)

= (ر* . ﻕ + ﻫ . ﻕ) (س*)

إذاً (٢) (ر* + ﻫ) . ﻕ = ر* . ﻕ + ﻫ ﻕ لكـل ﻕ ∈ حسَ ولكـل ر*، ﻫ ∈ ح لكل س* في س يكـون ((ر* ﻫ). ﻕ) (س*) = ((ر* ﻫ) ﻕ (س*) = ر*(ﻫ ﻕ(س*)

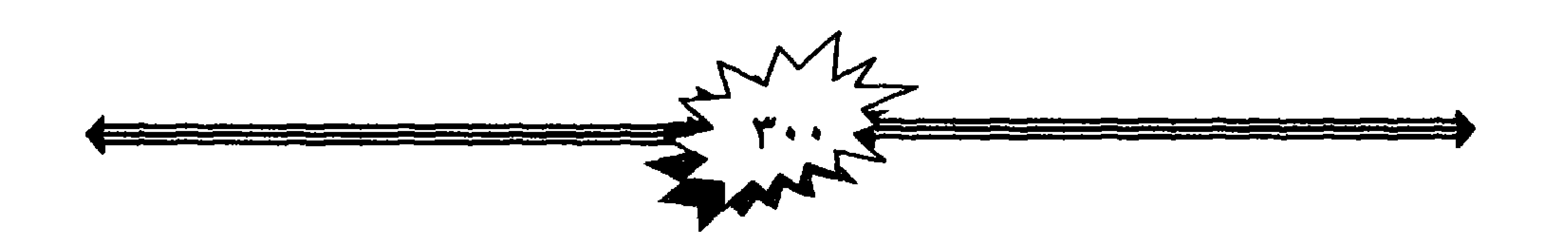
= ر* ((ﻫ - ﻕ) (س*) = (ر*. (ﻫ. ﻕ))(س*)

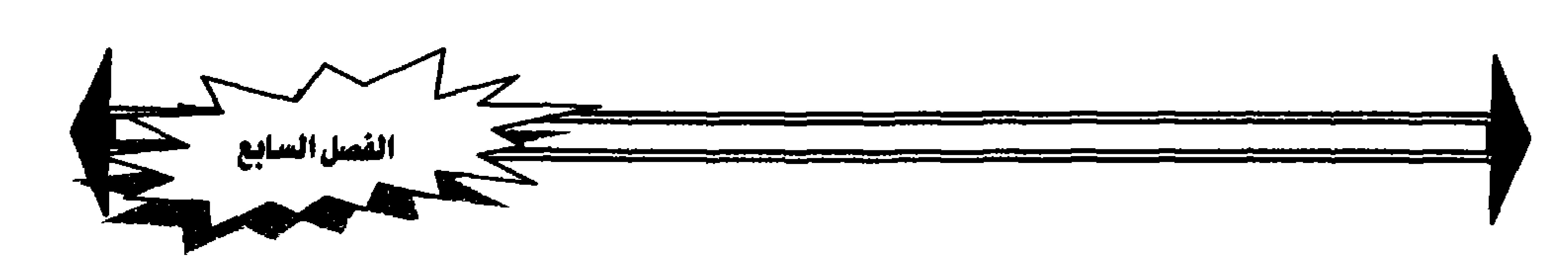
إذاً (٣) (ر*ﻫ) . ﻕ = ر* . (ﻫ ﻕ) لكـــل ﻕ ∈ حسَ ولكـــل ر*، ﻫ∈ح لكل س في س يكون (١ . ﻕ) (س*) = ١ ﻕ(س*) = ﻕ(س*).

إذاً (٤) ١ . ﻕ = ﻕ لكـل ﻕ ∈ حسَ، فـإذاً الـضرب القياسـي يحقـق الشروط (١)، (٤) وبهذا يتم البرهان إن العملية الثنائية في الحلقة (حسَ، +، ٠) ستكون لها نفس الخاصية للعملية الثنائية في الفـضاء المتجهـات لأن ر* . ﻕ = ر* . ﻕ وذلـــــــك لأن (ر* . ﻕ) (س*) = ر*، ﻕ (س*) = ر* (س*). ﻕ(س*) = (ر* . ﻕ) (س*) لكل س* في س

وبذلك فإن التمايز بينهما فقط عندما يكون بين دالتين أو بين عدد ودالة.

ملاحظة: شاهدنا في النظـريتين ٢-١١، ٢-١٢ إن جمـع وطـرح وضـرب الدوال يتم عندما تكون مجالاتها نفـس المجموعـة الجزئيـة، والآن سنوضـح جمـع





وطرح وضرب الدوال العددية عندما يكون مجالاتها غير متساوية والتي ستصادفنا في الفصول القادمة.

لتكن ق: س ⟵ ح و هـ: ص ⟵ ح دالتين عدديتين وأن أ = س ∩ ص ≠ Φ فإن ق+هـ، و ق − هـ، و ق، هـ يكون ق | أ + هـ | أ، ق | أ − هـ | أ، ق | أ . هـ | على التوالي والمعرفة كما في النظرية ٢-١٣.

مثال (١):

لتكن ق : س ⟵ ح بحيث أن ق(س*) = س*٢ لكل س* في س = {س* : | س* | ≤٢} .

ولتكن ق : ص⟵ ح بحيث أن ق(س*) = س* لكل س* في ص = {س* : س* ≤ ٠ }

أولاً:

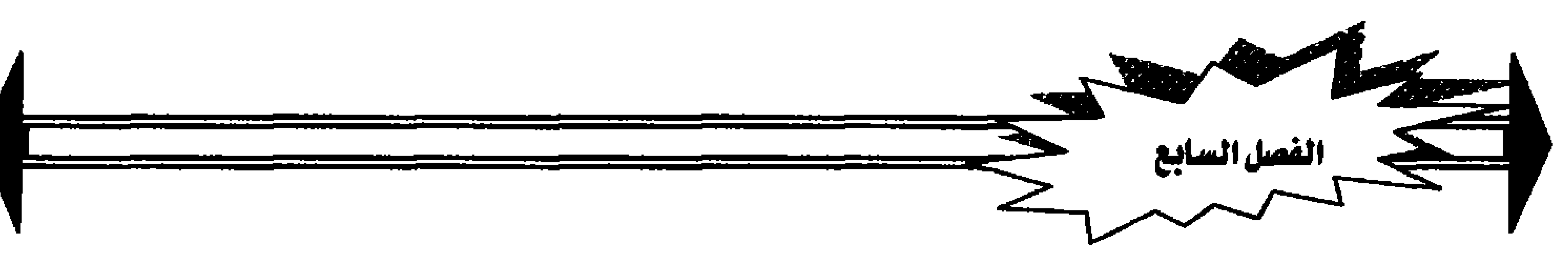
س ∩ ص = {س* : س* ≤ ٠} ∩ {س* : −٢ ≤س*≤٢} = {س* : ٠≤س*≤٢} = أ

ثانياً:

لتكن ق : أ⟵ ح بحيث أن ق(س*) = س*٢ لكل س* في أ = { س* : ٠≤س*≤٢}.

ولتكن هـ : أ ⟵ح بحيث أن هـ(س*) = √س* لكل س* في أ = { س* : ٠≤س*≤٢}





ثالثاً: يكون مجموع ق + هـ التي هي مجموع تحديد ق و هـ على المجموعة أ فبذلك

ق + هـ = أ ⟵ ح بحيث

(ق + هـ) (س*) = ق(س*) + هـ (س*) = س*² + $\sqrt{س^*}$ لكل س*

في أ = { س* : ٠ ≤ س* ≤ ٢}

مثال (٢): لتكن هـ : س ⟵ ح بحيث ق(س) = س* + ٢ لكل س* في*

س = {س* : -١ ≤ س* ≤ ٤} ولتكن ق : س ⟵ ح بحيث ق(س*) = س* -٢ لكل س* في ص = {س* : -٤ ≤ س* ≤ ١}.

ولإيجاد ضرب هاتين الدالتين نتبع الخطوات التالية:

أولاً:

س ∩ ص = { س* : -١ ≤ س* ≤ ٤} ∩ { س* : -٤ ≤ س* ≤ ١}

= { س* : -١ ≤ س* ≤ ١}

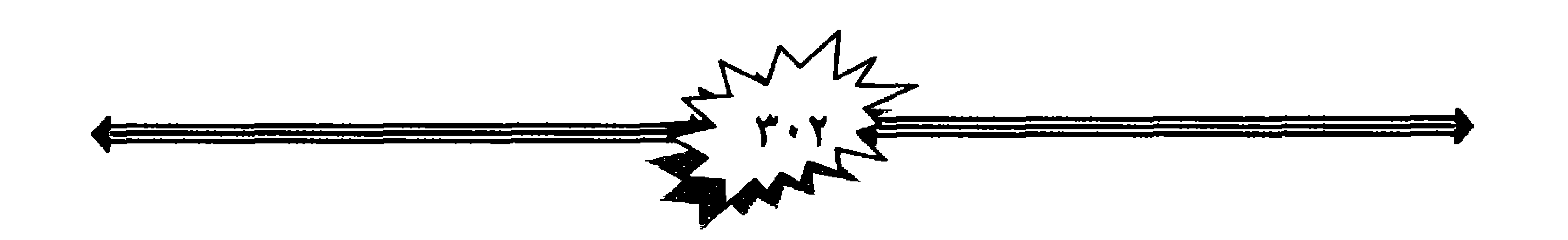
ثانياً: ق . هـ : أ ⟵ ح بحيث:

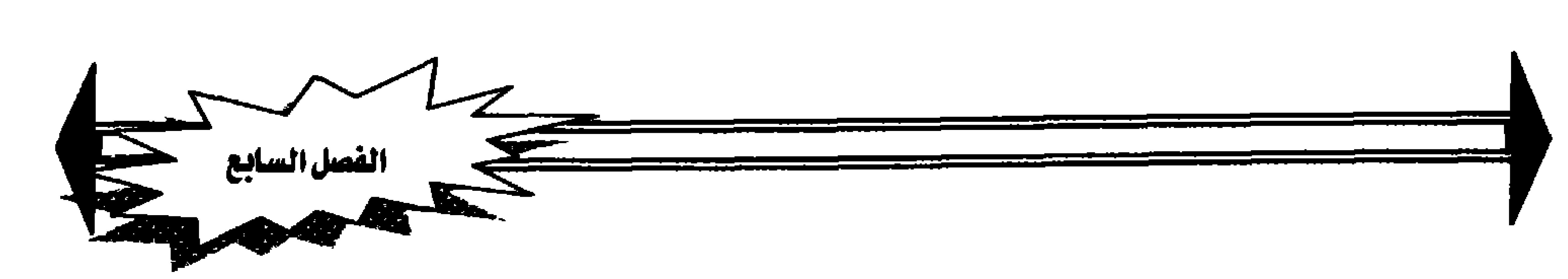
(ق . هـ) (س*) = ق (س*) . هـ (س*) = (س* + ٢) (س* -٢) = س*² -٤ لكل س* في أ = { س* : -١ ≤ س* ≤ ١}.

أما تقسيم دالتين فالعملية فيها بعض المحاذير، ويجب معاملتها معاملة خاصة.

تعريف٢-١٧:

لتكن كل من ق: س ⟵ ح و هـ: ص ⟵ ح دالة عددية، ولتكن المجموعة





أ = س ∩ ص{س ∈ س ∩ص: هـ (س*)=٠ } مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية، فيقال للدالة، والتي نرمز لها كاتفاق لفظي $\frac{ق}{هـ}$، $\frac{ق}{هـ}$: أ ⟵ ح بحيث $\frac{ق(س^*)}{هـ(س^*)} = \frac{ق}{هـ}(س^*)$ لكل س* في أ، تقسيم الدالة ق على هـ.

مثال (٣):

لتكن ق : س ⟵ ح دالة عددية بحيث ق(س*) = س* + ١ لكل س* في س

={-١ ≥ س ≥ ٣} ولتكن هـ : ص ⟵ ح دالة عددية بحيث هـ (س*) = س* - ١ لكل س* في س في ص = {س* : ٠ ≥ س* ≥ ٤}، فما هي الدالة $\frac{ق}{هـ}$

أولاً: س ∩ ص = {س* : -١ ≥ س* ≥ ٣} ∩ {س* : ٠ ≥ س* ≥ ٤}

= {س* : ٠ ≥ س* ≥ ٣}

ثانياً: هـ (س*) = س* - ١ = ٠ ⟸ س* = ١

ثالثاً: أ = س ∩ ص - {س* : هـ (س*) = ٠}

= {س* : ٠ ≥ س* ≥ ٣} - {١}

رابعاً: $\frac{ق}{هـ}(س^*) = \frac{ق(س^*)}{هـ(س^*)} = \frac{س^*+١}{س^*-١}$ $\frac{ق}{هـ}$: أ ⟵ ح

لكل س* في المجموعة أ = { س* : ٠ ≥ س* ≥ ٣}





تمارين

١- لتكن ق : س ⟵ ح دالة بحيث ق (س*) = $\frac{١}{س^* - ١}$ لكل س* في س = ح - {١}

أوجد ما يلي:

أ- ق(٠)   ب- ق(-١)

جـ- ق (١ + $\frac{١}{٣}$)   د- ق(٠,٩٩٩)

هـ- ق(٠,٠٠١)   و- ق(ق($\frac{٣}{٢}$)).

٢- لتكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س*) = س*^{٢} + س* + ٣ لكل س* في ح

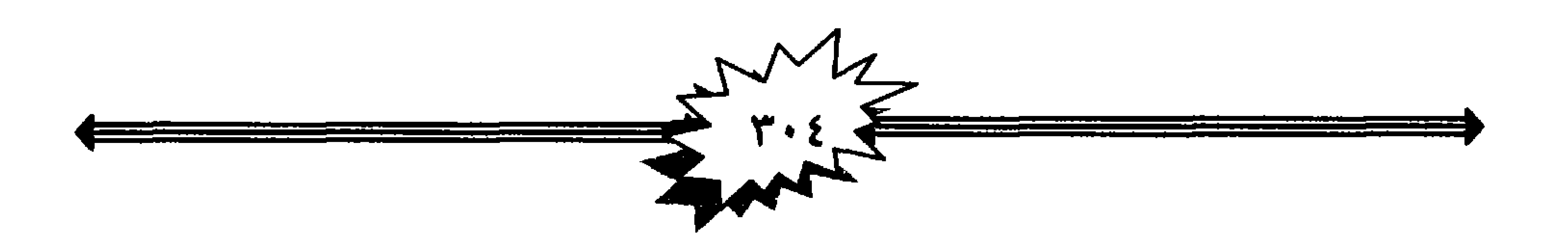
أوجد ما يلي:

أ) ق(أ)   ب- ق(أ + هـ)

جـ- ق(أ + هـ) − ق(أ)

د) $\frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$، عندما هـ ≠ ٠

٣- صنع صندوق على شكل متوازي المستطيلات مفتوح من الأعلى من صفيحة معدن مستطيلة الشكل وذلك بقطع مربعات من زواياه الأربع وثني الجوانب إلى أعلى. أوجد العلاقة بين طول المربع وحجم هذا متوازي المستطيلات.



٤- أسطوانة دائرية الشكل قائمة رسمت داخل مخروط دائري ارتفاعه هـ ونصف قطره ر بحيث قاعدة الأسطوانة تكون على قاعدة المخروط ومحيط القاعدة العليا للأسطوانة يقع على سطح المخروط. أوجد علاقة نصف قطر الأسطوانة بحجمها.

٥- لتكن ق : س ⟵ ح دالة وأن أ و ب مجموعتين غير خاليتين فبرهن على أن:

أ- ق(أ ∩ ب) = ق (أ) ∪ ق (ب)   جـ) ق(أ) - ق(ب) ⊂ ق(أ - ب)

ب) ق(أ ∩ ب) ⊂ ق(أ) ∩ ق(ب)

د) إذا كان ب ⊂ أ فإن ق(أ) ⊂ ق(ب) حيث أن ق(أ) = {ق(س*) ∈ ص: س*∈أ}

٦- لتكن ق: س⟵ ح بحيث أن ق(س*) = $\frac{1}{س^* + 1}$

لكل س* في س = {س* : س* ≥ ٠}.

ولتكن هـ : ص ⟵ ح دالة بحيث أن هـ(س*) = $\sqrt{2 - س^*}$ لكل س* في س

= {س* : س* ≥ ٢}

اوجد كل ممايلي: $\frac{ق}{هـ}$، ق. هـ ، ق- هـ ، ق+ هـ.



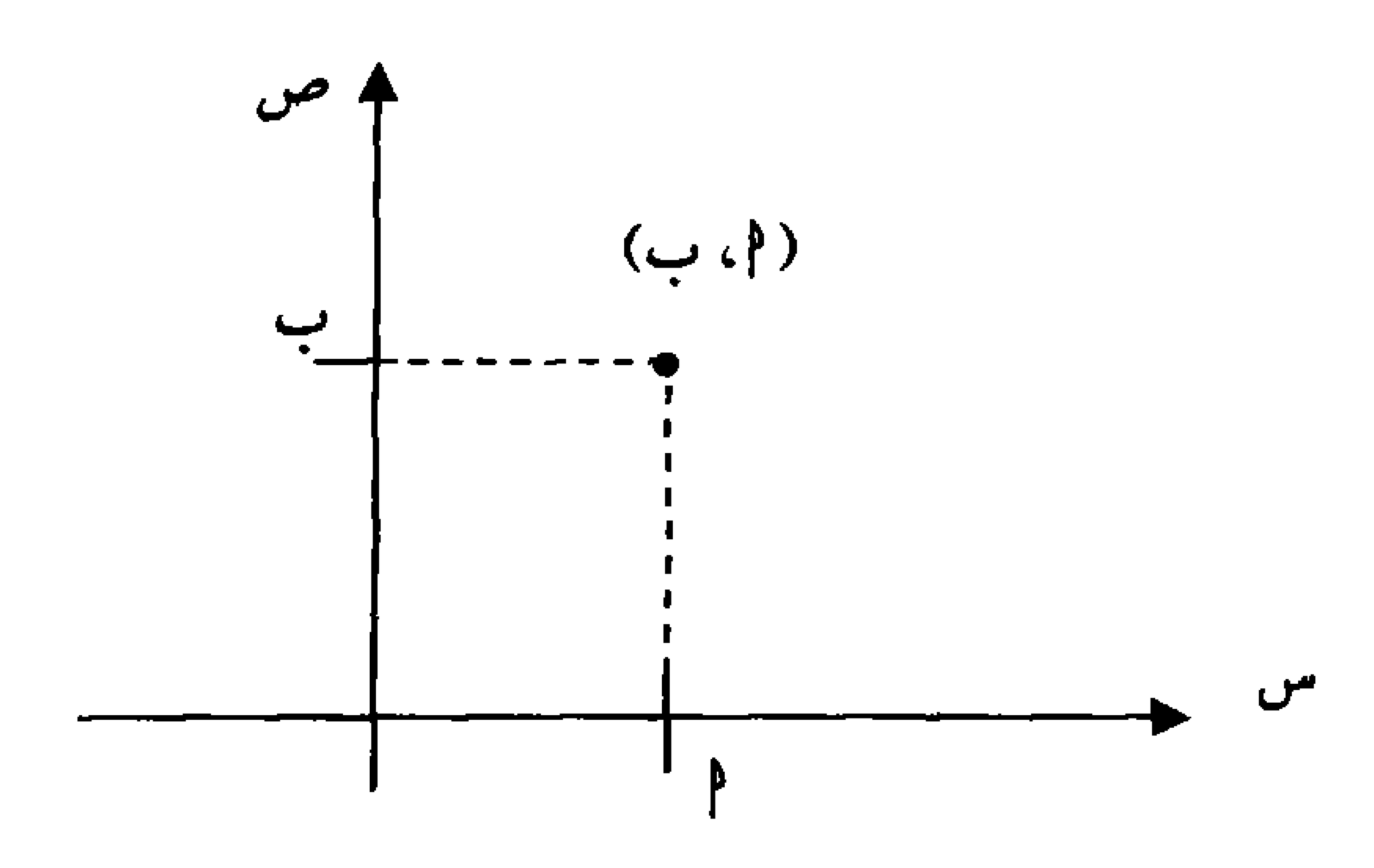
٥-٢ مخطط الدالة Graph of a function

تعلمنا في الفصل الأول كيفية تمثيل كافة الأعداد الحقيقية على مستقيم، أي أن هناك تقابل بين نقاط المستقيم (في المفهوم الإقليدي) وبين مجموعة الأعداد الحقيقية، أي كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على مستقيم وكل نقطة على مستقيم تمثل بعدد حقيقي، غير أن هناك في نظام المجموعة ضرب مجموعتين أي مجموعة الأزواج المرتبة للمجموعتين، ولو كانت كل من هاتين المجموعتين هي مجموعة الأعداد الحقيقية لذا فإن ح × ح يمثل مجموعة الأزواج المرتبة، حيث إحداثي كل زوج مرتب هو عدد حقيقي. وعندما نستخدم المفاهيم الهندسية الإقليدية فإن المستوى سيكون التمثيل في هذه المرة، حيث كل زوج مرتب يمثل بنقطة في المستوى الإقليدي وكل نقطة في هذا المستوى يمثل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية أي هناك تقابل بين مجموعة النقاط التي تكون المستوى الإقليدي ومجموعة الأزواج المرتبة بين الأعداد الحقيقية. وكما تعلمنا عند وضع النقاط لهذا التقابل يجب أن تكون هناك طريقة معينة. والطريقة هي أن نثبت مستقيم معين في المستوى ويدعى بمحور س ونعلم أن نقاط هذا المستقيم في حالة تقابل مع مجموعة الأعداد الحقيقية، لذا فعند أخذ أي زوج مرتب مثل (أ، ب) فإننا نستطيع تعيين نقطة على محور س بحيث تقابل العدد أ نعلم أن العدد الحقيقي. له مكان كنقطة على محور س ومن الحالات الإقليدية يوجد مستقيم عمود واحد على محور س في النقطة التي تقابل العدد ٠، ويدعى هذا المستقيم بمحور ص. وكما نعلم يوجد تقابل بين نقاط هذا المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية وعند اعتبار نقطة تقاطع المحورين والتي تدعى نقطة الأصل بأنها النقطة على محور ص التي تقابل العدد ٠، لذا لتعيين النقطة ب التي تقابل العدد ب على هذا المستقيم



وبإقامة مستقيم عمود على محور س من النقطة التي تتعين بالعدد ‍أ، وبإقامة مستقيم عمود على محور ص من النقطة التي تتعين بالعدد ب فإن النقطة التي تتعين بتقاطع هذين العمودين هي النقطة المناظرة لهذا الزوج المرتب، وكما تعلمنا أن النقاط والمستقيمات والمستوى يمكن تمثيلها هندسياً، لذا فإن النقطة التي تقابل المرتب (‍أ، ب) ستمثل كما في الشكل ٢-٣.

كما يدعى هذا المستوى بالمستوى س ص فهناك تقابل بين ح × ح ونقاط المستوى س ص



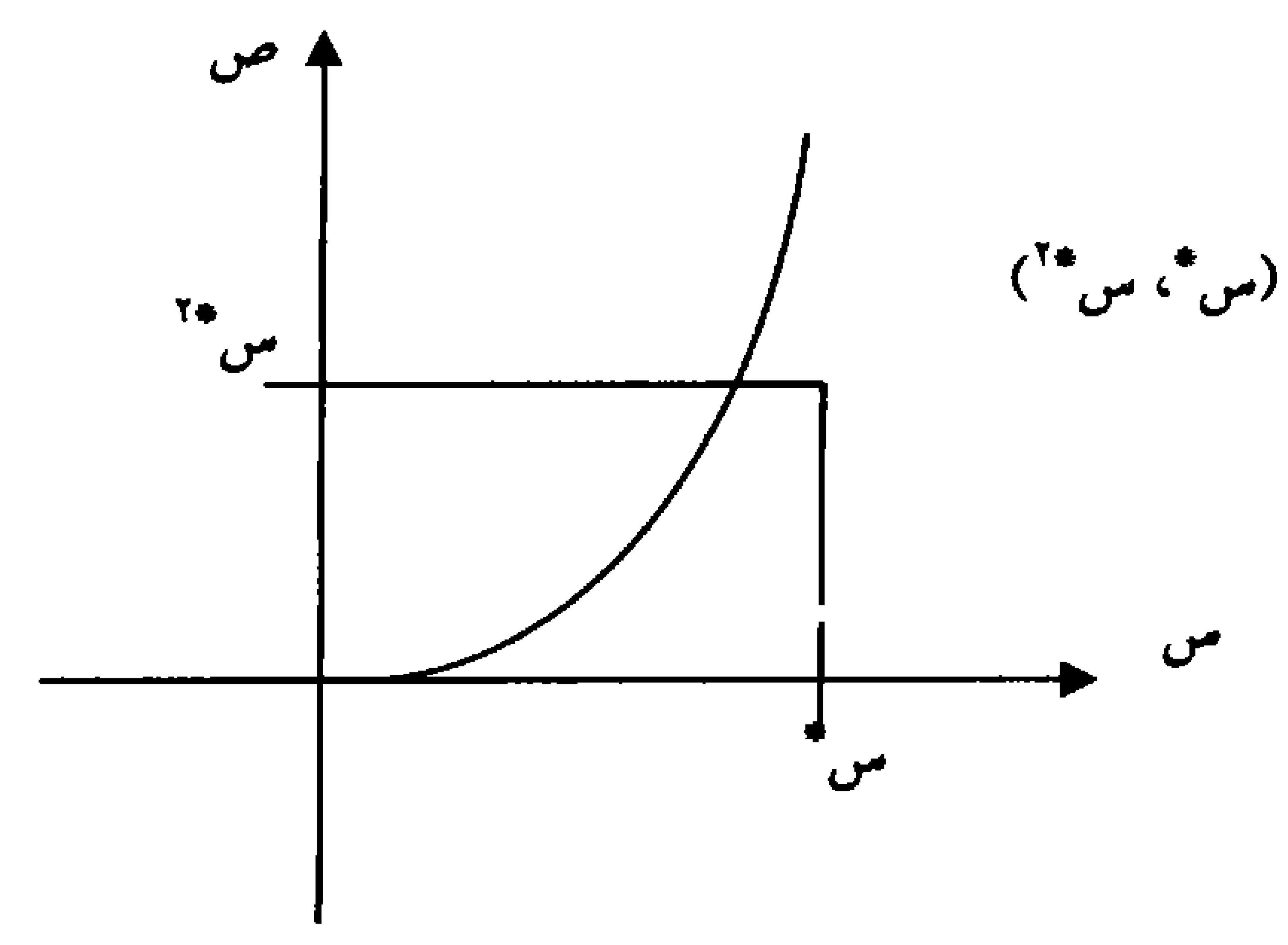
لتكن ق : أ ⟵ ح دالة عددية لذا فإن ق مجموعة جزئية من أ × ح والتي هي مجموعة جزئية من ح × ح وبما أن هناك تقابل بين الأزواج المرتبة ونقاط المستوى س ص لذا فإن المجموعة الجزئية ق ستعين مجموعة جزئية من نقاط المستوى س ص ومجموعة هذه النقاط تسمى بالمخطط الديكارتي للدالة أو مخطط الدالة Graph of a function. لذلك فإن كل زوج مرتب من الأعداد والذي يكون عنصراً في بيان الدالة يكون من النوع (س*، ق(س*)) وهذا الزوج المرتب يعين نقطة واحدة في المستوى س ص كما أن هناك بعض الخواص المساعدة التي تعطي فكرة معينة لتوضيح مخطط الدالة.

تعريف٢-١٨ :

لتكن د: س ← ح دالة عددية وأن س مجموعة جزئية تحتوي على الأقل على عددين، فيقال أن د مطردة بالتزايد $د(س_{١}^{*}) < د(س_{٢}^{*})$ لكل $س_{١}^{*} < س_{٢}^{*}$ في س ويقال ان د مطردة بالتناقص $د(س_{٢}^{*}) < د(س_{١}^{*})$ كل $\{س^{*} : س^{*} \leq ٠\}$ $س_{١}^{*} < س_{٢}^{*}$ في س.

مثال : لتكن د: س ← ح دالة بحيث أن $د(س^{*}) = (س_{٢}^{*})$ لكل في $س = \{س^{*} : س^{*} \leq ٠\}$ نأخذ عددين $س_{١}^{*}$، $س_{٢}^{*}$ في س بحيث $س_{١}^{*} < س_{٢}^{*}$ فان $س_{١}^{*٢} < س_{٢}^{*}$.

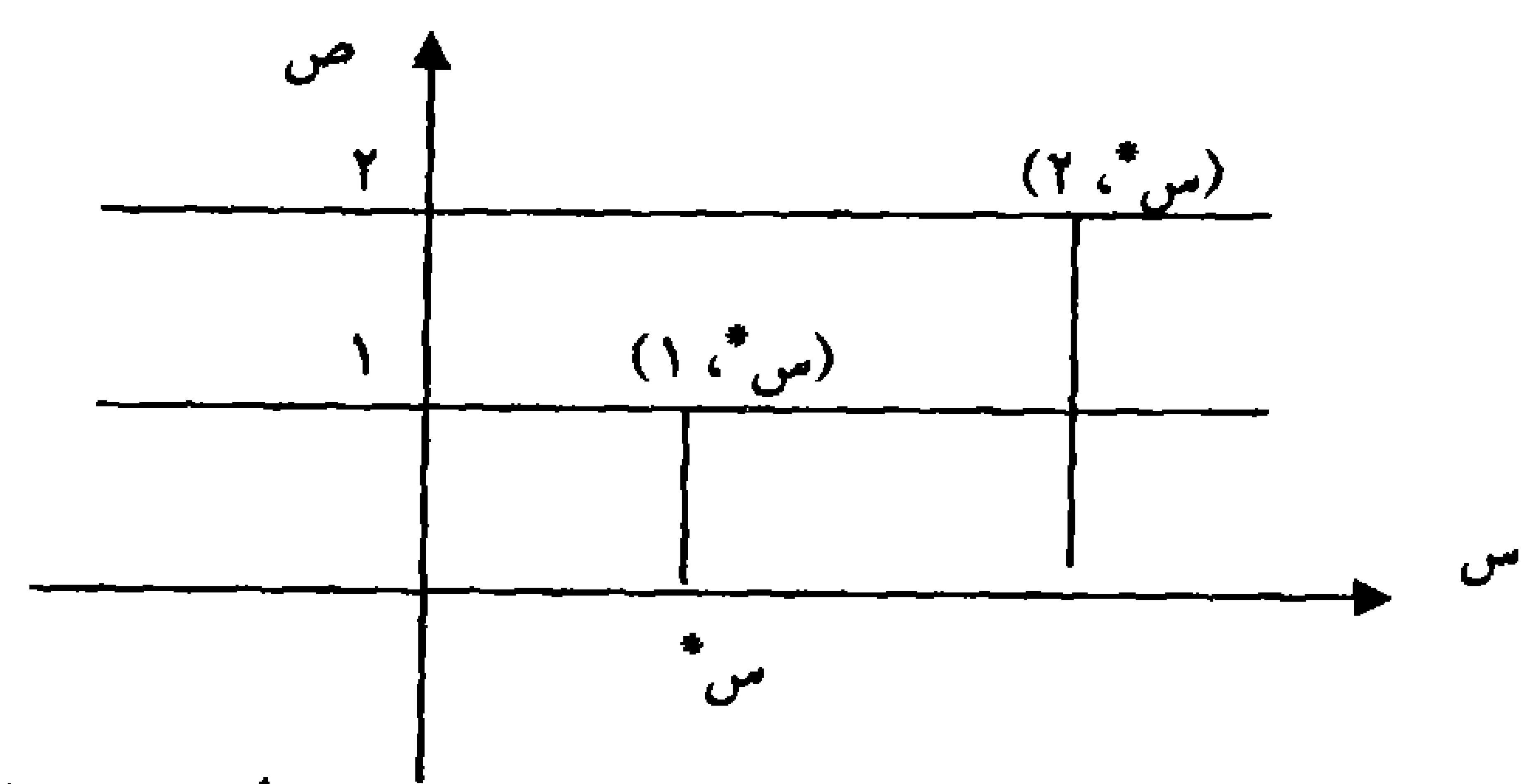
فعليه $د(س_{١}^{*}) < د(س_{٢}^{*})$ لذا فإن هذه الدالة مطردة في التزايد والزوج المرتب $(س^{*}، س^{*٢})$ يكون عنصراً في بيان الدالة بكل $س^{*}$ في س ويمكن تمثيلها بنقطة في مستوى س ص فيكون المخطط الديكارتي لهذه الدالة كما في الشكل ٢-٤.



مثال: لتكن د: ح ← ح دالة عددية بحيث أن د(س*) =

$$\begin{cases} ٢ : س^{*} & \text{عدد نسبي} \\ ٢ : س^{*} & \text{عدد غير نسبي} \end{cases}$$ **لكل $س^{*} \in ح$.**

لو أخذنا أي عددين س$_1^*$، س$_2^*$ في ح بحيث أن س$_1^*$ $<$ س$_2^*$ فلو كان س$_1^*$ عدد نسبي وس$_2^*$ عدد نسبي فإن ق(س$_1^*$) = ق(س$_2^*$) = ١ وبذلك فإن هذه الدالة غير مطردة في التزايد ولا النقصان. والمخطط الديكارتي لهذه الدالة يكون كما في الشكل ٢-٦.



هناك طريقة مساعدة في رسم المخططات الديكارتية لمجموع وطرح وضرب دالتين وتمكن القارئ من رسم مخططاتها بصورة تقريبية بمعرفة مخططات دوال معينة.

مثال: لتكن ق: س ⟵ ح دالة بحيث أن ق(س*) = س* + ١ لكل س* في
س = {س* : س* $\geq$ ٠}

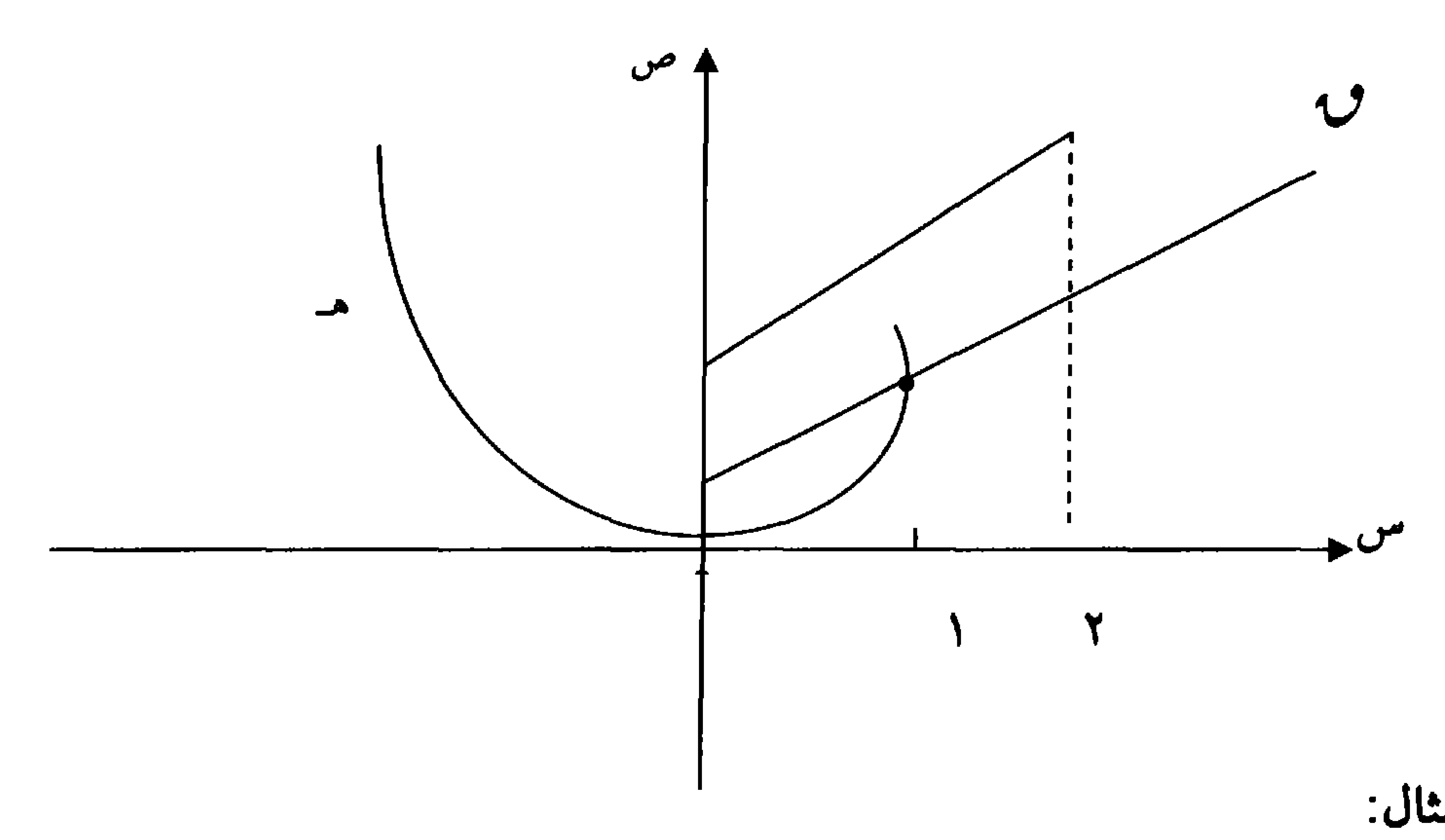
ولتكن هـ : ص ⟵ ح دالة بحيث أن هـ(س*) = س^{*2} لكل س* في
ص = {س*:س*$\geq$٢} نعلم أن (ق + هـ) : أ ⟵ ح دالة بحيث أن:

أ = {س* : ٠ $\geq$ س* $\geq$ ٢} ولكل س* $\in$ أ نجد أن (ق + هـ) (س*)

= ق(س*) + هـ(س*)

= س^{*2} + س* + ١

ولرسم هذه الدالة نأخذ س* في أ ونجمع القيمتين ق(س*) وهـ(س*) كما في الشكل ٢-٧.



مثال:

لتكن ن: س ⟵ ح دالة بحيث أن ن(س*) = $\sqrt{\text{س}^*}$ لكل س* في س = {س*:س*≤٠} ولتكن هـ : ص ⟵ ح دالة بحيث أن:

هـ (س*) = { ١ : س* عدد نسبي ، ٢ : س* عدد غير نسبي } لكل س* في ص = مجموعة الأعداد الحقيقية.

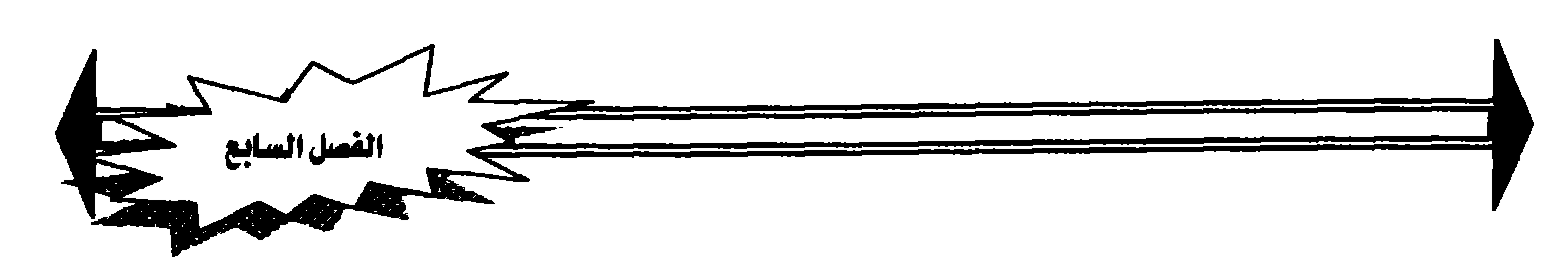
ولرسم مخطط الدالة ن . هـ:أ ⟵ ح حيث أ=س = {س*:س* ≤ ٠}.

بحيث أن

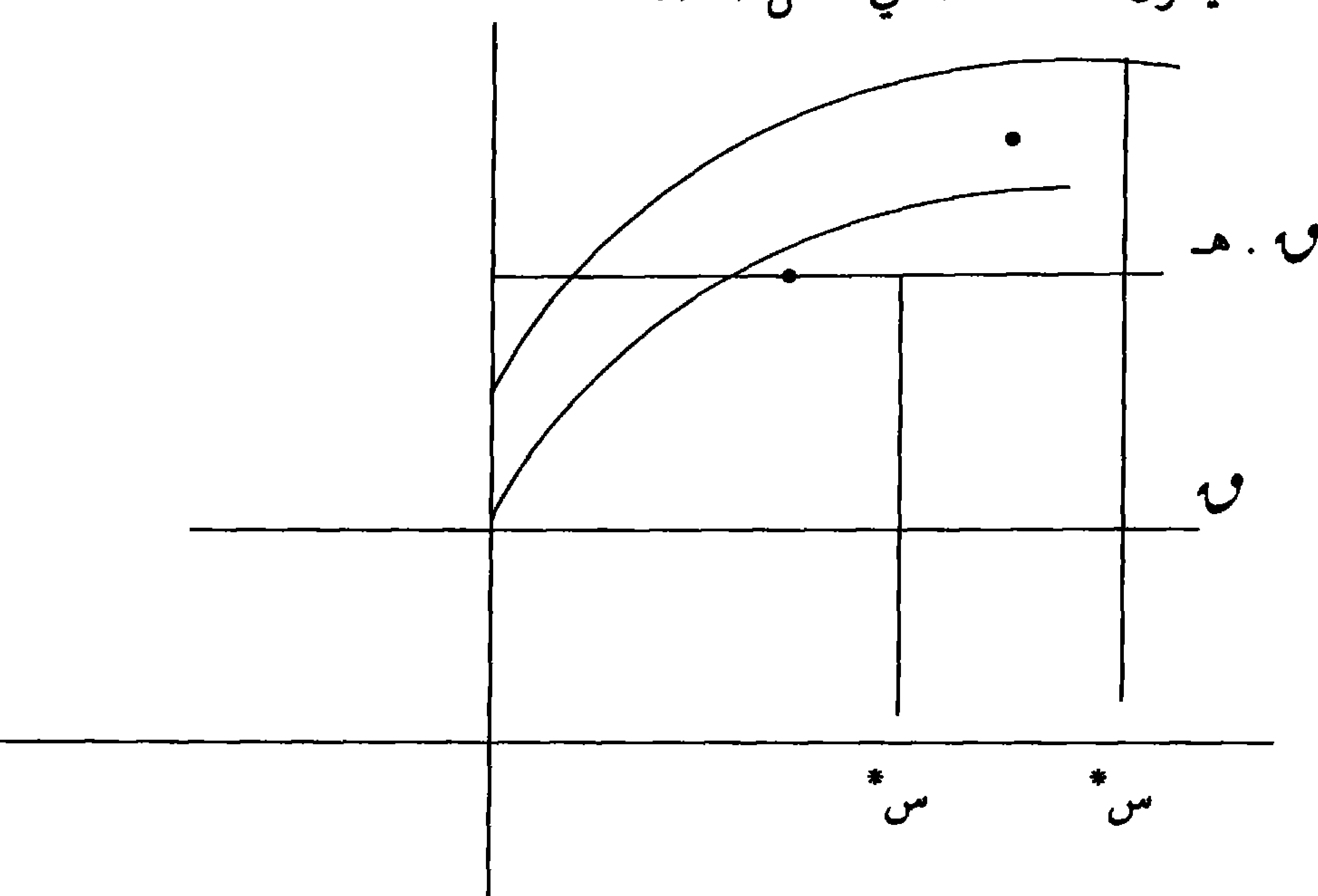
(ن.هـ) (س*) = ن(س*) . هـ(س*) =

($\sqrt{\text{س}^*}$). { ١ : س* عدد نسبي ، ٢ : س* عدد غير نسبي }

(ن.هـ) (س*) = { $\sqrt{\text{س}^*}$ عدد نسبي ، $2\sqrt{\text{س}^*}$ عدد غير نسبي } كل س* في أ



فيكون المخطط كما في شكل ٢-٧.



(٣-٦) دالة التركيب Composite Function

نظرية٢-١٩:

لتكن هـ ∋ فَ ولتكن ى ∋ صَ فيوجد عنصر هـ* في فَ بحيث أن هـ*(س*) = هـ(ى(س*)) لكل س* ∋ س.

البرهان: ليكن ى ∋ صَ فإن ى: س ← ص دالة، وليكن هـ ∋ فَ فإن هـ: ص ← ف دالة لكل س* في س توجد قيمة واحدة إلى ى في س* وهي ى(س*) في ص الذي هو منطلق هـ لذا يجب أن تكون هناك قيمة إلى هـ في ى(س*) وهي هـ(ى(س*)). في ص فعليه



هـ* = { (س*، هـ(ق(س*)) : س* ∋ س} ⊂ س × ف

تكون علاقة من س إلى ف غير أن لكـل س* في س يظهـر كإحـداثي أول الزوج مرتب واحد فقط، لذا ستكون هذه العلاقـة دالـة، إذاً هـ* ∋ فَ بحيـث هـ*(س*) = هـ(ق(س*)) لكل س*∈س ومـن تـساوي الـدوال فهنـاك دالـة واحدة في فَ لها هذه الخاصية.

تعريف٢-٢٠: يرمز إلى هـ* في النظرية الـسابقة بـالرمز هــ ∘ق وبـذلك يكون (هـ∘ق)(س*) = هـ(ق(س*)) لكل س* في س حيث هـ∋ حَ وق ∋ صَ.

في التعريف ٢-٢٠ لو رمزنا إلى هـ* إلى هـ ∘ق لكل (هـ، ق) ∋ فَ × صَ، فإن و : فَ × صَ ⟵ فَ تكون دالة.

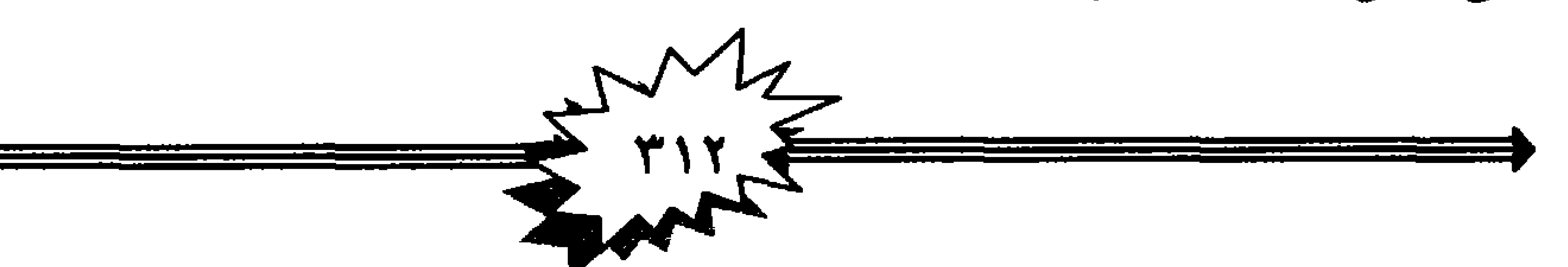
بحيث و (هـ ق)(س*) = هــ (ق(س*)) لكـل س* في س، ولتوضـيح هذا المفهوم نأخذ المثال التالي:

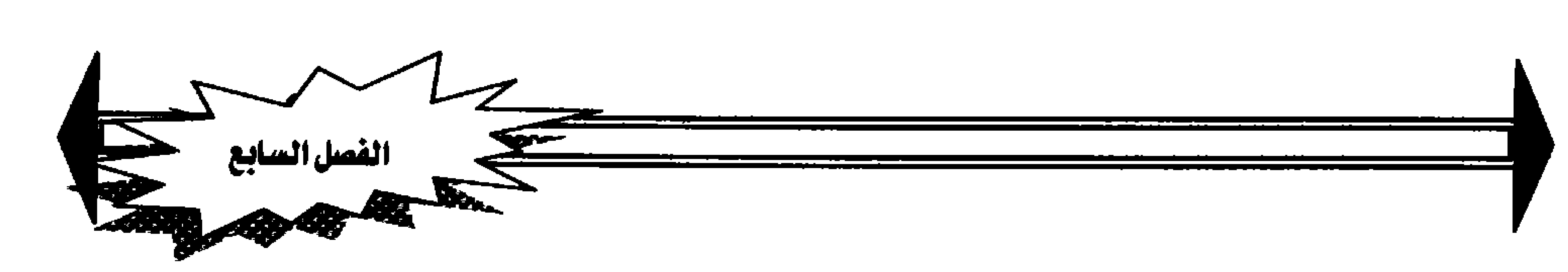
مثال:

لتكن ق ∋ صَ أي لتكن ق : س ⟵ ص دالة بحيـث أن ق(س*) = $\sqrt{س^*}$ لكل س* في س = {س* : س* ≤ ٠} وأن ص = { ص* : ص* ≤ ٠}

ولتكن هـ ∈ حَ أي لتكن

هـ : ص⟵ ح دالـة بحيـث أن هــ(س*) = س*+١لكـل س* في ص= {س*:س*≤٠} مجموعة الاعداد الحقيقية فـان الدالـة ، هــ∘ق أو و(هــق)





ستكون على هذا الاساس هـ∘ن:ص ⟵ ح بحيث ان (هـ∘ن)(س*) = هـ(ن(س*)) = هـ(س*) = $(س^*)^2$ + ١ = س* + ١ لكل س* في س

مثال آخر: لتكن ن∋ صَسَ وأن س = {س*:٠ ≤ س*≤ ٢} و ص= {س*:٠≤ س* ≤ ٤} وأن ن(س*) = $س^{*2}$ لكل س* ∋ س

ولتكن هـ ∋ حَصَ بحيث هـ(س*) = ٤ – س* لكل س*∋ص وأن العنصر هـ∘ن في المجموعة حَسَ سيكون (هـ∘ن)(س*) = هـ(ن(س*)) = هـ($س^{*2}$) = ٤ – $س^{*2}$ لكل س* في س.

والآن يمكن صياغة التعريف ٢-١٩ بطريقة توضيحية ونقول:

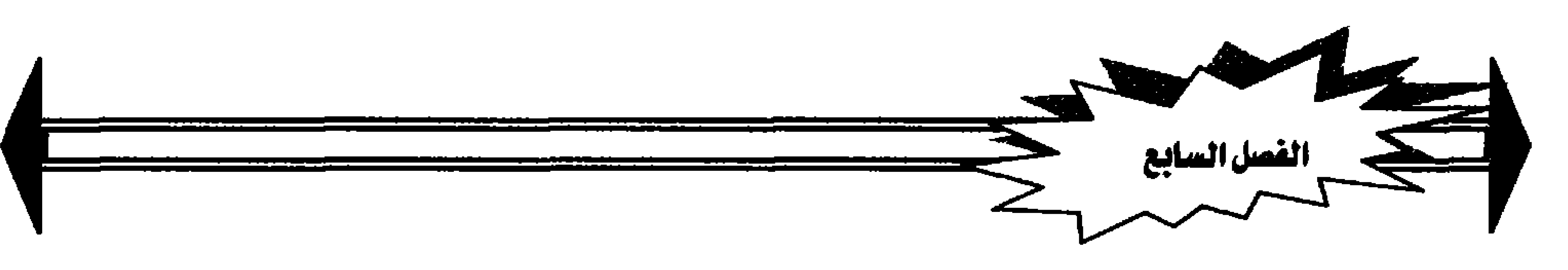
إذا كان س $\xrightarrow{ن}$ ص $\xrightarrow{هـ}$ ح فيوجد $\xrightarrow{هـ∘ن}$ بحيث أن

س $\xrightarrow{ن}$ ص $\xrightarrow{هـ}$ ح

$\xrightarrow[هـ∘ن]{}$ حيث الأسهم إشارة للدوال

لو تفحصنا البرهان السابق الذي سبق التعريف فنجد أن ص كمدى بالنسبة لهذا التعريف لا يلعب دوراً مهماً لأن (هـ∘ن)(س*) = هـ(ن(س*)) حتى يكون الطرف الأيمن من هذه المساواة عدداً معرفاً يجب أن يكون ن(س*) حتى يكون الطرف الأيمن من هذه المساواة عدداً معرفاً يجب أن يكون ن(س*) في مجال هـ، ونعلم أن (س*) هو عدد يوجد دائماً في مدى ن لذا فإن مدى ن هو الذي يلعب الدور الرئيس وليس مداها. لذا فنستطيع أن نستنتج مما سبق، ونحصل على نتائج أفضل، ونقول:





نتيجة٢-٢١: لتكن ق ∋ م^ص و هـ ∋ ف^ص أي أن ق : س ⟵ م دالة، وأن ف تكون

هـ: ص ⟵ ف دالة بحيث ق(س*) ⊂ ص فتوجد دالة هـ∘ق : س ⟵ ق بحيث أن (هـ∘ق)(س*) = هـ(ق(س*)) لكل س* في س.

مثال: لتوضيح هذه الفكرة نقول، لتكن ق : س ⟵ ح بحيث أن ق(س*) = س* - ١ لكل س* في س = {س* : ٢ > س*} فمن الواضح أن مدى هذه الدالة ستكون المجموعة

ق(س) = {س* : ١ > س*}.

ولو كانت هـ : ص ⟵ ح بحيث أن ص = {س* : س* ≠ ١} ولكل س* ∋ ص كانت هـ(س*) = $\frac{١}{س^* - ١}$

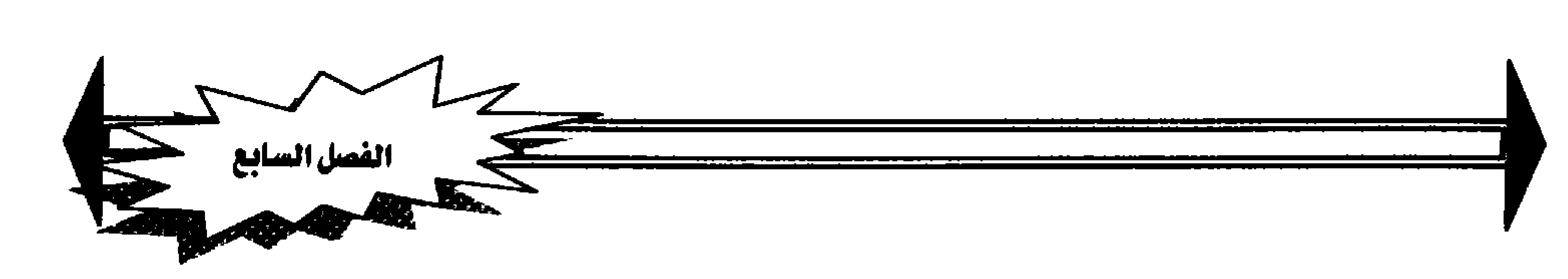
من الواضح أن كل عدد حقيقي في ق(س*) ينتمي إلى ص وبذلك فإن ق(س) ⊂ ص فعليه توجد دالة بين س و ح بحيث أن لكل س* تكون قيمة هذه الدالة في س* هو العدد هـ(ق(س*)) لأن ق(س*) دائماً يكون في منطلق هـ لكل س* في س

فعليه هـ∘ق : س ⟵ ح دالة بحيث أن

(هـ∘ق)(س*) = هـ(ق(س*)) = هـ (س*- ١) = $\frac{١}{(س^* - ١) - ١}$ =

$\frac{١}{س^* - ٢}$ لكل س* في س





لو استمرينا في دراسة دالة التركيب فنجد من الضروري توسيع هذا المفهوم إلى دوال عندما لا تحقق الشرط في النتيجة ٢-٢١ ولنأخذ لأن أي دالتين عدديتين، ومن السهولة وضعها كما يلي

ق : س ⟵ ح و هـ : ص ⟵ ح دالتين، فلو كان ق(س) ⊂ ص فإن من الواضح وجود الدالة هـ∘ق : س ⟵ ح بحيث (هـ∘ق)(س*) = هـ(ق(س*)) لكل س* في س. لأن ق(س*) يكون في منطلق هـ. والآن إن لم تكن ق(س) ⊂ ص نأخذ المجموعة

ب = ق(س) ∩ ص فتكون مجموعة جزئية من ص نفترض الآن أن ب مجموعة غير خالية ونأخذ المجموعة أ في منطلق ق بحيث أ = {س* ∈ س : ق(س*) ∈ ب}

والآن نستطيع معرفة تحديد الدالة ق على ب فنقول ق|أ : أ ⟵ ح

هـ|ب : ب ⟵ ح دالتين بحيث أن ق|أ(س*) = ق(س*) لكل س* في أ.

فلو حللنا هاتين الدالتين لوجدنا أن مدى ق|أ وهو ق|أ (أ) يكون

ق|أ (أ) = { ق|أ (س*) : س* ∈ أ} = {ق(س*) : س* ∈ أ}

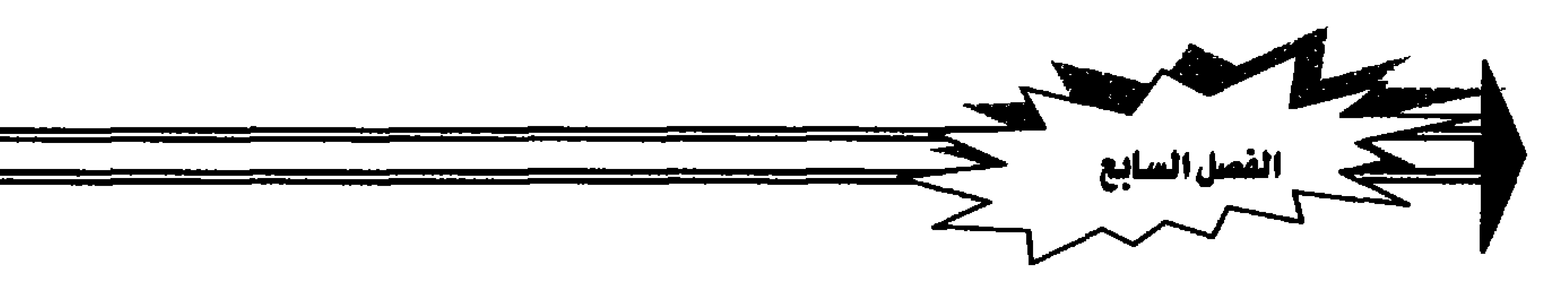
= {ق(س*) : س* ∈ س، ق(س*) ∈ ب}

= {ق(س*) : ق(س*) ∈ ق(س) ، ق(س*) ∈ ب}

= {ق(س*) : ق(س*) ∈ ق(س) ∩ ب}

= {ق(س*) : ق(س*) ∈ ب} = ب





لذا فإن مدى $ق|_أ$ يساوي منطلق $هـ|_ب$ وحسب تعريف ١-٢٠ تكون $(هـ|_ب \circ ق|_أ) : أ \longrightarrow ح$ دالة بحيث أن $(هـ|_ب \circ ق|_أ)(س^*) = هـ|_ب (ق|_أ (س^*))$ لكل $س^*$ في أ

إذاً $(هـ|_ب \circ ق|_أ)(س^*) = هـ|_ب\ ق\ (س^*))$

لأن $ق\ (س^*) \in ب \Longrightarrow هـ\ (ق(س^*))$

وسيكون هذا برهاناً للنظرية الآتية:

نظرية٢-٢٢:

لتكن $ق \in \overset{س}{ح}$ و $هـ \in \overset{ص}{ح}$ بحيث أن $ق(س) \cap ص = ب \neq \Phi$

فإن $(هـ|_ب \circ ق|_أ) : أ \longrightarrow ح$ دالة حيث أن

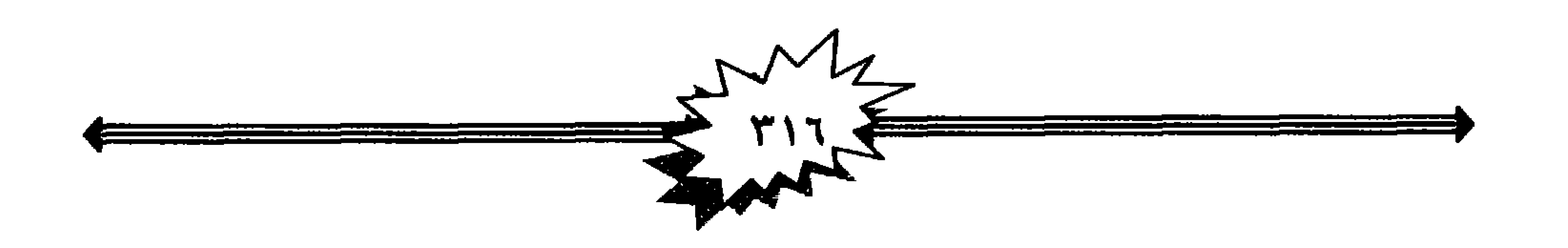
$(هـ|_ب \circ ق|_أ)(س^*) = هـ\ (ق(س^*))$ لكل $س^*$ في $أ = \{س^* : ق(س^*) \in ب\}$

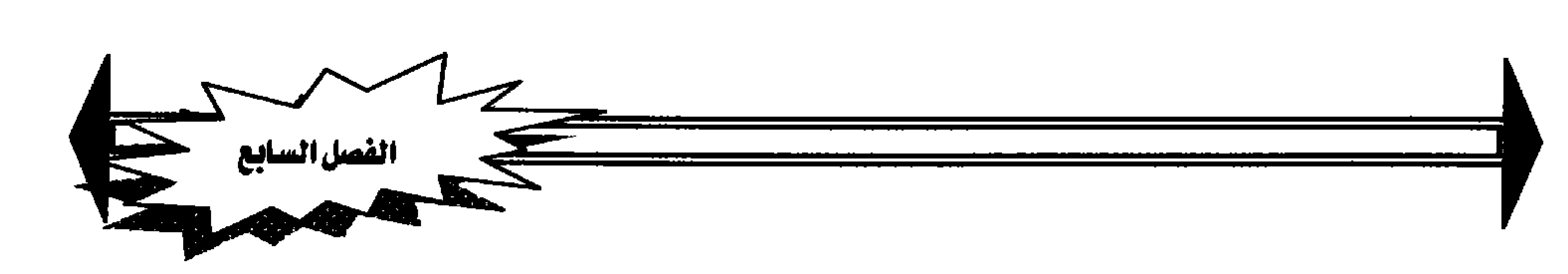
تعريف٢-٢٣: يقال للدالة $هـ|_ب \circ ق|_أ$ في النظرية ٢-٢٢ تركيب الدالتين ق و هـ ويرمز لها نفس الرمز $هـ \circ ق$.

مثال: لتكن $ق(س) = -س^٢$ عندما $ق : س \longrightarrow ح$ لكل $س^*$ في $س = \{س^* : س^* \geq ٠\}$

ولتكن $هـ : ص \longrightarrow ح$ دالة بحيث $هـ(س^*) = \sqrt{س^*}$ لكل $س^*$ في $ص = \{س^* : س^* \leq ٠\}$ أوجد $هـ \circ ق$؟

لإيجاد هذا التركيب نتبع الخطوات التالية:





١- إيجاد مدى الدالة ى

ى(س) = {ى(س*) ∈ ح : س* ∈ س} = {- س*^{٢}:س*∈س} =
{س* : س* ≥ ٠}

٢- إيجاد المجموعة ب

ب = ى(س) ص = {س* : س* ≥ ٠} = {س* : س* ≤ ٠} = {٠}
≠ Φ

٣- إيجاد المجموعة أ

أ = {س* ∈س : ى(س*) ∈ ب} ={س* ∈ س: - س*^{٢} =٠} = {٠}

فعليه فإن هـ∘ى : {٠} ⟵ ح دالة بحيث (هـ∘ى)(س*) =
هـ(ى(س*)) = هـ(- س*^{٢}) = $\sqrt{-\text{س}^{*2}}$ لكل س* ∈ {٠}.

وبذلك يكون مخطط هذه الدالة نقطة الأصل (نقطة تقاطع المحورين س وص).

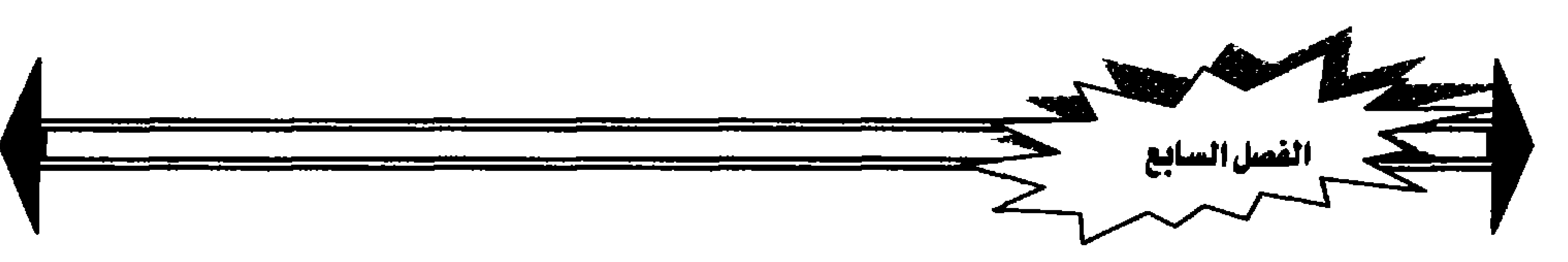
مثال: لتكن ى : ح ⟵ ح دالة بحيث ان:

ى(س*) = { ١:س* عدد نسبي ، -١:س* عدد غير نسبي } لكل س* ∈ ح

ولتكن هـ : ص ⟵ ح دالة بحيث هـ(س*) = (س* - ١)^{٢} لكل س* في ص = {س* : س* ≤ ٠} ولإيجاد هـ∘ى نتبع الخطوات التالية:

١- إيجاد مدى الدالة ى ى(س) = {ى(س*) ∈ ح : س* ∈ س} =
{-١، ١}





٢- إيجاد المجموعة ب ب = ق(س) ص = {-١، ١} {س* : س* ≤ ٠} = {١}

٣- إيجاد المجموعة أ أ = {س* ∋ س : ق(س*) ∋ ب} = {س* ∋ ح : ق(س*) = ١}

ن = {س* ∋ ح: س* عدد نسبي}.

فعليه تكون هـ∘ق : ن ← ح دالة بحيث (هـ∘ق) (س*) = هـ(ق(س*))= هـ(١) = ٠ لكل س* = ن

إذاً هـ∘ق = ٠ : ن ← ح.

أما مخططها فيكون النقاط على محور س والتي تقابل الأعداد النسبية.

تعريف٢-٢٤:

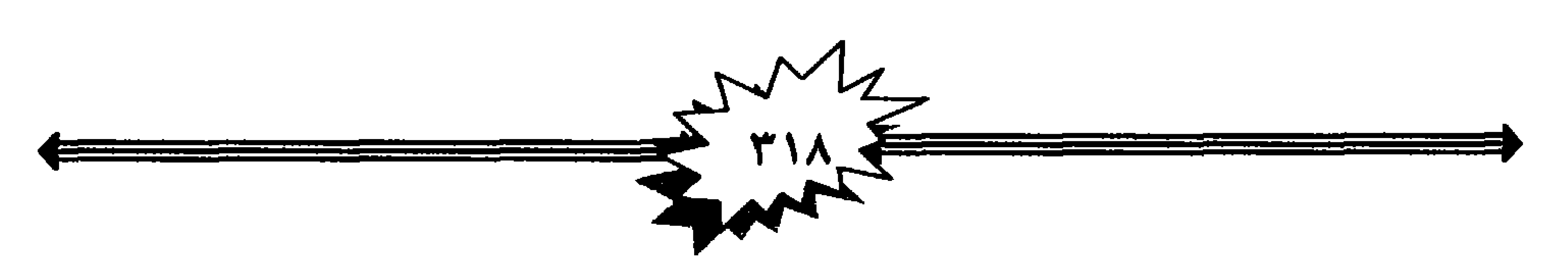
لتكن I : س ← ح دالة عددية بحيث أن I(س*) = س* لكل س* ∋ س، فتدعى هذه الدالة بالدالة الذاتية Idenfity Function.

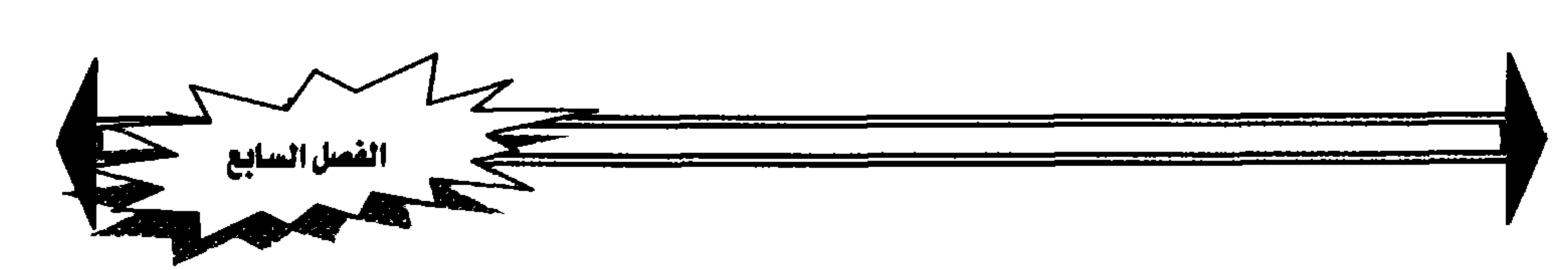
نظرية٢-٢٥:

(حَ، ٥) تكون نصف زمرة مع عنصر التحايد.

البرهان: من الواضح أن لكل هـ ق ∋ حَ فإن هـ∘ق ∋ حَ حسب تعريف ٢-٢٠ . وبهذا برهنا خاصية الإغلاق.

لكل س* في ح يكون هـ*∘((هـ∘ق)) (س*) = هـ* (هـ∘ق) (س*)
= هـ*(هـ(ق(س*))= (هـ*∘هـ)(ق(س*)=((هـ*∘هـ) ∘ ق(س*)=





إذاً هـ*∘((هـ∘ق)) (هـ*∘هـ)∘ ق وهذا برهان لخاصية التجميع.

لتكن I ∈ ح̃ دالة ذاتية أي أن I(س*) = س* لكل س* ∈ ح، إذاً لكل س* في ح يكون

(I∘ق)(س*) = I (ق(س*)) = ق(س*)

(ق∘I)(س*) = ق(I(س*)) = ق(س*) فعليه، فإن I∘ق = ق∘I = I

وهذا يثبت وجود عنصر التحايد، وبهذا يكمل البرهان.

٢-٧: دوال خاصة Special Functions:

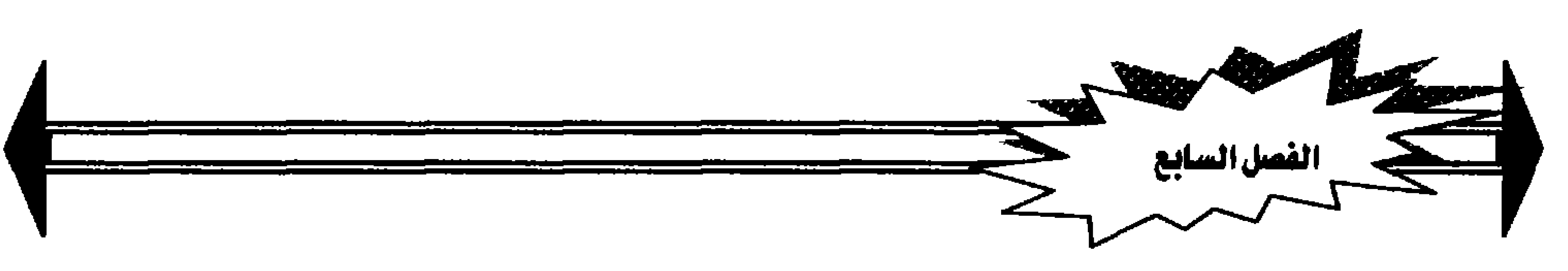
سوف يقتصر عملنا على الدوال العددية، وبذلك فعندما نذكر دالة نقصد بها دالة عددية، توجد دوال خاصة، أي لها أسماء معينة ونتعامل معها كثيراً في دراستنا ووجدنا هنا وضع مفاهيم لبعض هذه الدوال.

نعلم أن (ح̃، +، ٠) حلقة تبديلية تحتوي على العنصر المحايد ١ كما أن الزمرة الإبدالية ح̃ تكون فضاء متجهات فوق الحقل ح مع وجود الضرب القياسي. فبذلك فإن الدالة I ∈ ح̃ دالة الذاتية تلعب دوراً في تعاريفنا القادمة.

نرمز إلى I……….I . I (ن من المرات حيث ن ∈ ط) بالرمز $I^{ن}$ لذا فإن $I^{ن}$ ∈ ح̃ لأنها بعملية الضرب تكون نصف زمرة إبدالية.

فعليه $I^{ن}$: س ⟵ ح بحيث $س^{*ن}$ = س*………. ٠ س* ٠ س* = I(س*)…….I (س*) ٠ I(س*) = $I^{ن}$ (س*) لكل س* ∈ س.





وبما أن الزمرة الإبدالية $ح^{س}$ تكون فضاء متجهات فإن ر* . I ∋ $ح^{س}$، أي أن

ر* . $I^{ن}$: س ⟵ ح بحيث

ر*س*^{ن}= ر* . $I^{ن}$(س*) = (ر* . $I^{ن}$)(س*) لكل س* في س

فعليه نستطيع أن نعطي التعريف التالي:

تعريف٢-٢٣:

لتكن ق = أ. . $I^{ن}$ + أ$_{١}$ $I^{ن-١}$ +.........أ$_{ن-١}$ I + أ$_{ن}$I

حيث i = ٠، ١، ٢............ن و أ$_{i}$ ∋ ح. وأن ن ∋ ط وأن أ. ≠ ٠

فيقال أن الدالة ق متعددة الحدود polynomial ويقال إن ن درجة متعددة الحدود.

من الملاحظ أن ق : س ⟵ ح بحيث أن لكل س* في س يكون

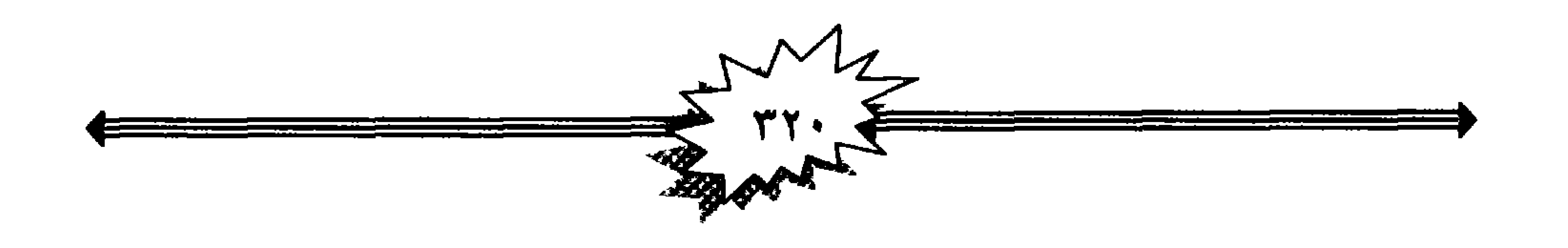
ق(س*) = (أ. $I^{ن}$ + أ $I^{ن-١}$+.............أ$_{ن-١}$ I + أ$_{ن}$. ١) (س*)

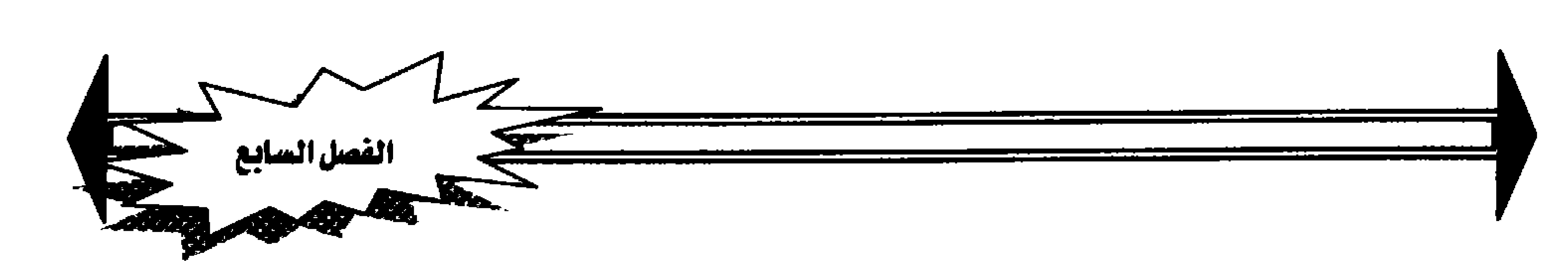
= أ. $I^{ن}$(س*) + أ$_{١}$ $I^{ن-١}$(س*) + ... أ$_{ن-١}$ I(س*) +

أ$_{ن}$.١(س*) = أ. س*^{ن} + أ$_{١}$ س*$^{ن-١}$ + ... أ$_{ن-١}$ (س*) + أ$_{ن}$

لذا فإن كل من ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س*) = س* - ٢ لكل س* ∋ ح.

و ق: س ⟵ ح بحيث ق(س*) = - س*^{٢} – ٤ س* لكل س* في س حيث س ⊂ ح





و $\mathcal{f}$: س ⟵ ح بحيث $\mathcal{f}$(س*) = ٤ - س*^{٢} لكل س* في س = {س* : | س* | ≥ ٢}

و ص = {س* : س* ≤ ٠} تكون متعددة الحدود.

بالاستعانة بتعريف ٢-١٧ نستطيع تعريف ما يلي:

تعريف٢-٢٤:

لتكن $\mathcal{f}$، هـ ∈ حَ متعددة الحدود فيقال للدالة $\frac{\mathcal{f}}{هـ}$: أ ⟵ ح بالدالة النسبية Rational function، حيث أن أ = س-{ س* ∈ س : هـ(س*) = ٠}

نستطيع القول أن الدالة يمكن كتابتها على شكل $\frac{\mathcal{f}}{هـ}$ حيث كل من هـ $\mathcal{f}$ متعددة الحدود تسمى بالدالة النسبية.

لذا فإن الدالة هـ* : س ⟵ ح بحيث أن هـ* (س*) = $\frac{٣س^{*} - ١}{س^{*٢} - ٣س^{*} - ٤}$

لكل س* في س = {س* : ٤ < | س* | } تكون دالة نسبية.

حسب دراستنا السابقة لاحظنا وجود دوال غير نسبية $\mathcal{f}$ ∈ حَ بحيث $\mathcal{f}$(س*) = $\sqrt{س^{*}}$ لكل س* في س.

لكن هذه الدالة يمكن وضعها بعلاقة مع الدالة • ونستطيع القول أن $\mathcal{f}^{٢}$ - I = و لأن لكل س* في س يكون ($\mathcal{f}^{٢}$ - I) (س*) = ($\mathcal{f}$. $\mathcal{f}$) (س*) - I(س*) = ($\mathcal{f}$(س*))^{٢} - س*

= ($\sqrt{س^{*}}$)^{٢} - س* = س* - س* = و = و(س*)

إذاً $\text{ف}^{٢} - I = ٠$

كما أن الدالة ف $\in \overset{\text{س}}{ح}$ حيث أن $\text{ف}(\text{س}^*) = \frac{\text{س}^* + \sqrt{\text{س}^* + ١}}{\text{س}^{*٢} + ١}$ لكل س^* في س تكون دالة غير نسبية.

لكن $(I^{٢} + ١)\ \text{ف}^{٢} - (٢.I^{٣} + ٢.I)\ \text{ف} + (I^{٤} - I + ١) = ٠$

لأن كل س^* في س يكون $((I^{٢} + I)\ \text{ف}^{٢} - (٢.I^{٣} + ٢.I)\ \text{ف} + (I^{٢} - I + ١))(\text{س}^*)$

$= (\text{س}^{*٢} + ١)(\text{ف}(\text{س}^*))^{٢} - (٢\text{س}^{*٣} + ٢\text{س}^*)\ \text{ف}(\text{س}^*)) + (\text{س}^{*٢} - \text{س}^* - ١)$

$$= (\text{س}^{*٢} + ١)\left[\frac{\text{س}^* + \sqrt{\text{س}^* + ١}}{\text{س}^{*٢} + ١}\right]^{٢} - ٢\text{س}^*(\text{س}^{*٢} + ١)$$

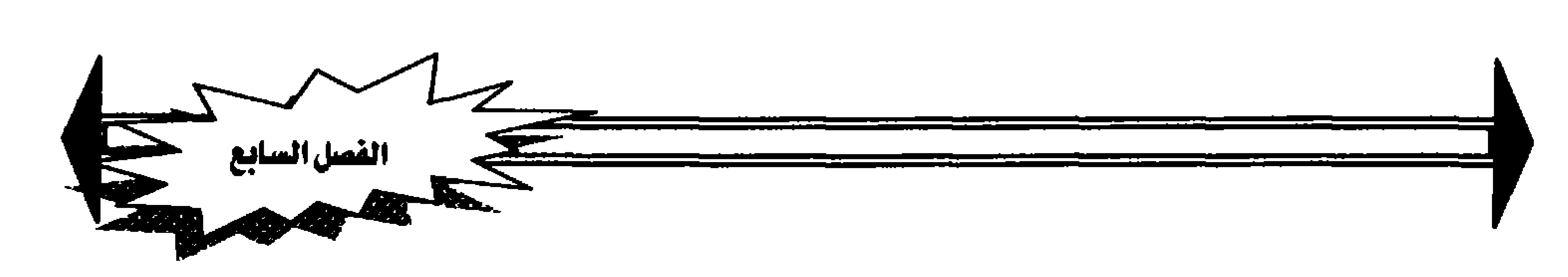
$\left[\frac{\text{س}^* + \sqrt{\text{س}^* + ١}}{\text{س}^{*٢} + ١}\right] + (\text{س}^{*٢} - \text{س}^* - ١) = \text{س}^{*٢} + ٢\text{س}^*\sqrt{\text{س}^* + ١} +$
$\text{س}^* + ١ - ٢\text{س}^{*٢} - ٢\text{س}^*\sqrt{\text{س}^* + ١} + \text{س}^{*٢} - \text{س}^* - ١ = ٠ = ٠ = ٠$ (س^*).

تعريف٢-٢٤:

يقال للدالة ف $\in \overset{\text{س}}{ح}$ دالة جبرية **Algebraic function**:

توجد $\text{م}_٠، \text{م}_١ .... \text{م}_ن \in \overset{\text{س}}{ح}$ متعددة الحدود حيث ن$\in$ط و $\text{م}_٠ \neq ٠$ بحيث

$\text{م}_٠\text{ف}^{ن} + \text{م}_١\text{ف}^{ن-١} + ... \text{م}_{ن-١} + \text{م}_ن = ٠$



لذا فإن كل من الدالتين في المثالين السابقين تكون دالة جبرية

لتكن $ﻭ \in ح^{س}$ بحيث أن $ﻭ(س^*) = |س^*|$ لكل $س^*$ في س تدعى هـذه الدالة بدالة القيمة المطلقة Absolute value function

ويمكننا كتابة هذه الدالة بطريقة أخرى $ﻭ : س \longrightarrow ح$ بحيث أن

$$ﻭ(س^*) = \begin{cases} -س^* : س^* < 0 \\ س^* : س^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{لكل } س^* \text{ في } س$$

لتكن $هـ : س \longrightarrow ح$ بحيث $هـ(س^*) = \sqrt{س^{*2}}$ لكـل $س^*$ في س هـل $ﻭ = هـ$؟

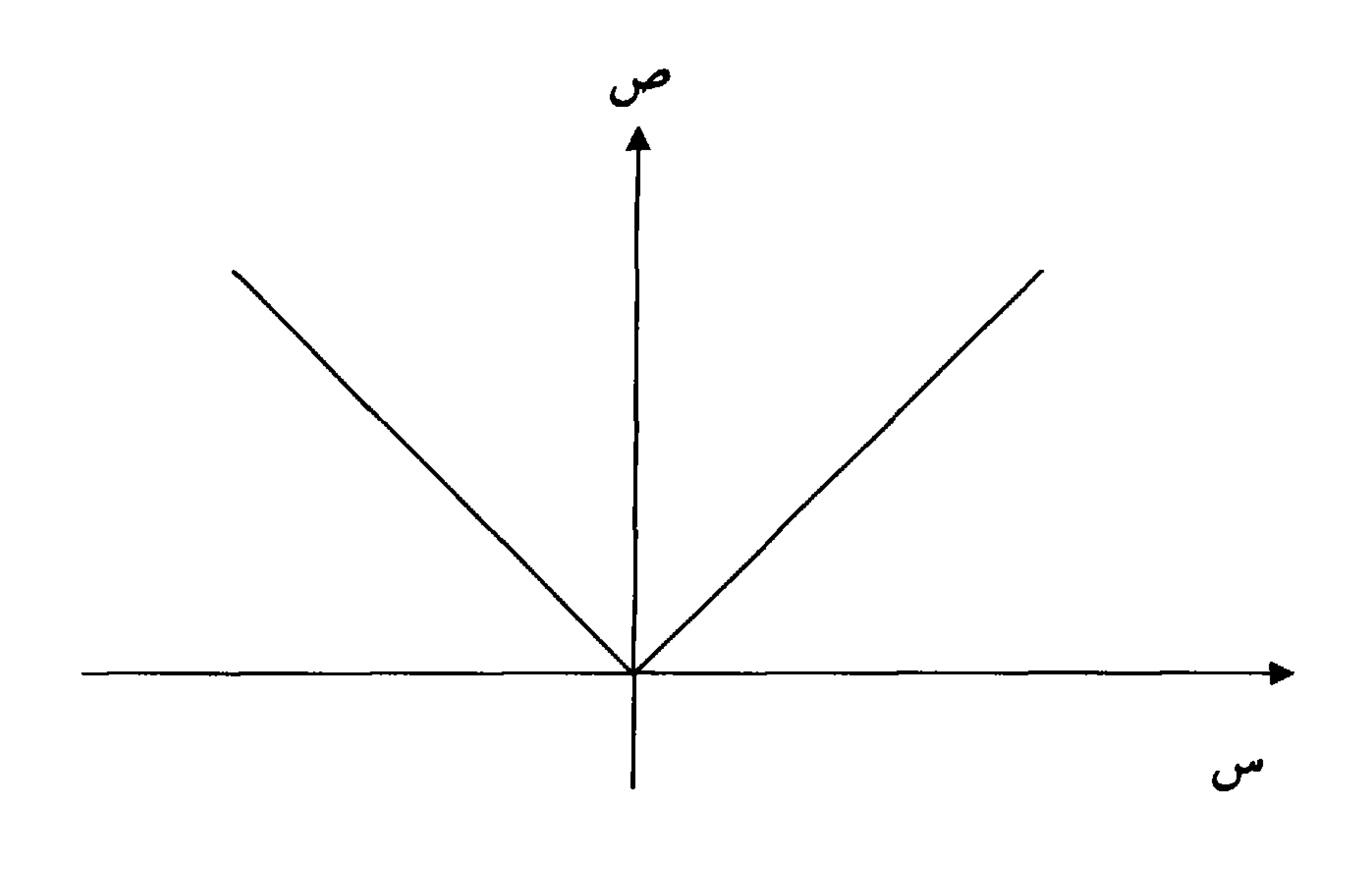
ملاحظـة: ربمـا يخطـئ القـارئ عنـدما يقـول أن $\sqrt{س^{*2}} = س^*$ لأن مـن الواضح عندما تكون $س^* < 0$ فإن الطرف الأيمن يكـون سـالب بينمـا الطـرف الأيمن هو موجب عندما تكون $س^* \geq 0$ فإن من الواضـح $هـ(س^*) = \sqrt{س^{*2}}$ لكن عندما تكون $س^* < 0$ فإن $هـ(س^*) = \sqrt{س^{*2}} = -س^*$

لذا فإن الدالة هـ يمكن أن تأخذ صيغة ﻭ وبذلك فإن هـ = ﻭ فعليه فإن

$$ﻭ(س^*) = \sqrt{س^{*2}} = \begin{cases} -س^* : س^* < 0 \\ س^* : س^* \geq 0 \end{cases}$$ ومن الممكنة برهنة $ﻭ^2 - I^2 =$ 0 لذا فإن هذه الدالة ستكون دالة جبرية.

أما مخطط الدالة فيكون كما في الشكل ٢-٨





(٢-٨)

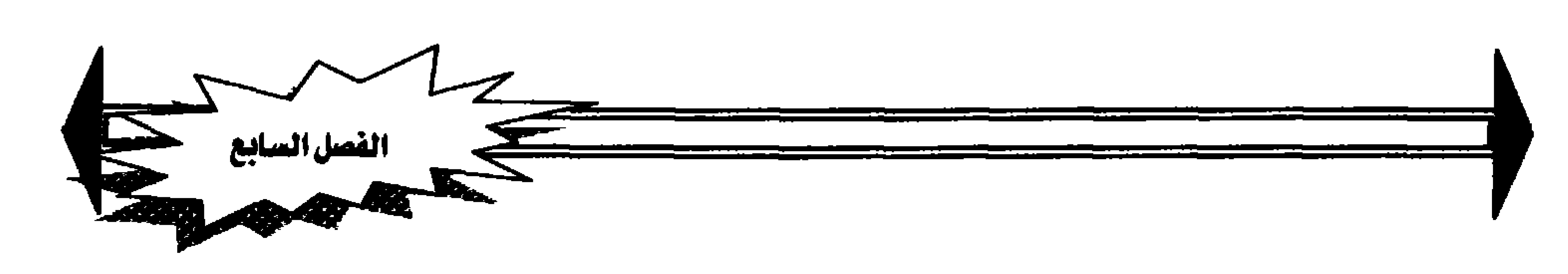
نظرية ٢-٢٥:

كل دالة نسبية تكون دالة جبرية.

البرهان: لتكن $ل \in \bar{ح}$ دالة جبرية، فيمكن كتابتها على شكل $ل = \frac{م_١}{م_٢}$

حيث $م_١$، $م_٢ \in \bar{ح}$ وكل منها متعددة الحدود، إذاً

$م_٢ ل - م_١ = ٠$ فعليه تكون ل دالة جبرية.



تعريف٢-٢٦:

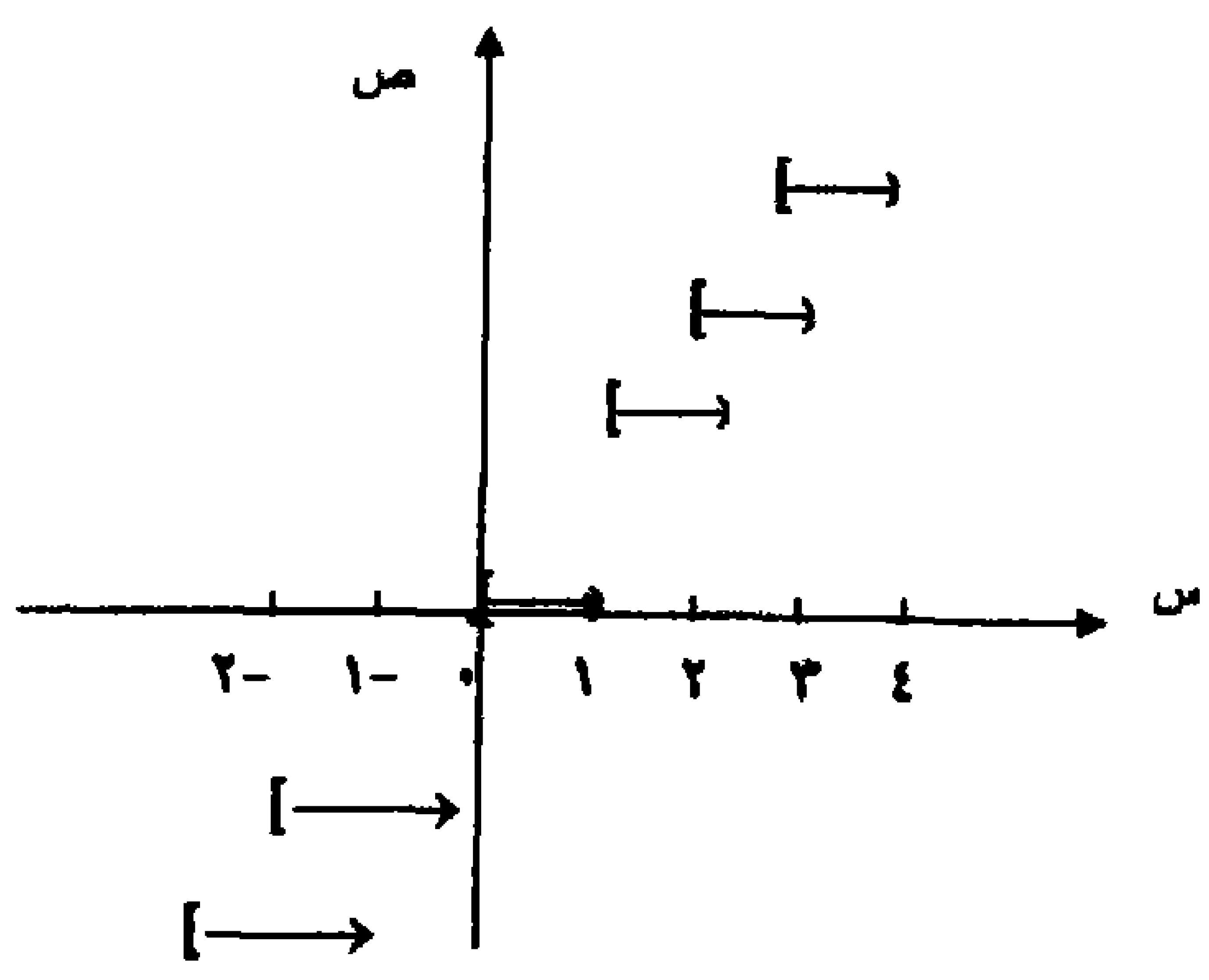
لتكن ق ∋ حٍّ إذا لم تكن ق دالة جبرية فتدعى بالدالة المتسامية Transcodental function.

وكمثال على هذا النوع من الدوال

(نعلم من تمرين ٦ في الأعداد الحقيقية: إذا كان س* عدد حقيقي فيوجد عدد صيح [س*] بحيث أن ن ≤ س* < ن+١ يرمز اعتيادياً إلى ن بالرمز [س*] ولذلك نستطيع القول لكل عدد حقيقي س* يوجد عدد صحيح [س*] بحيث ([س*] ≤ س* < [س*] + ١)

الدالة ق التي ق∋ حَ بحيث ق(س*) = [س*] لكل س*∋ح.

ومخطط هذه الدالة يكون كما في شكل ٢-٩.



شكل (٢-٩)

هذا وسنبحث موضوع الدوال المتسامية في بصورة تفصيلية.





"تمارين"

١- لتكن ق : ح ⟵ ح بحيث أن ق(س*) = ٢س* + ١ لكل س* في ح.

ولتكن هـ : ح ⟵ ح بحيث أن هـ(س*) = س*٢ - ٢ لكل س* في ح.

أوجد كل من هـ∘ق و ق∘هـ؟ وهل أن ق∘هـ = هـ∘ق؟

٢- لتكن ق ∋ صَسَ ولتكن هـ ∋ عَصَ برهن على أن:

أ) إذا كانت كل من ق و هـ دالة شاملة فإن هـ∘ق دالة شاملة.

ب) إذا كانت كل من ق و هـ دالة متباينة، فإن هـ∘ق دالة متباينة.

جـ) ماذا نستطيع القول عند معكوس العبارتين أ و ب.

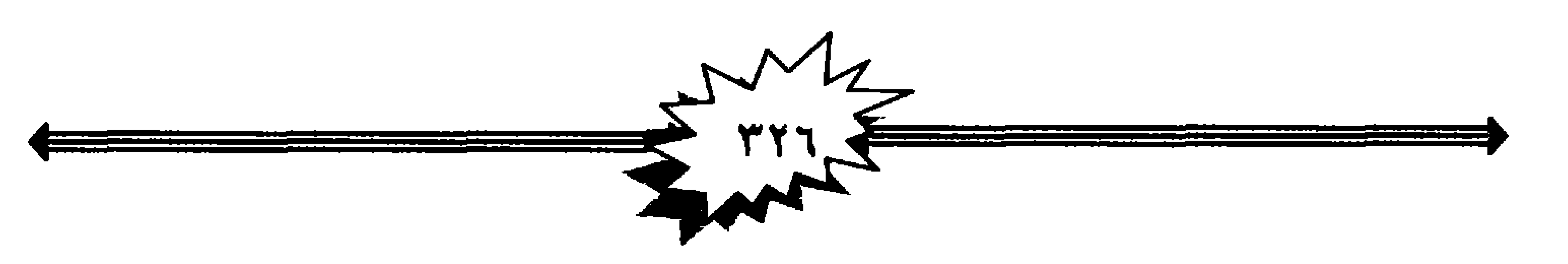
٣- لتكن ق ∋ صَسَ ولتكن هـ ∋ عَصَ بحيث أن هـ∘ق = I برهن أن ق متباينة و هـ شاملة.

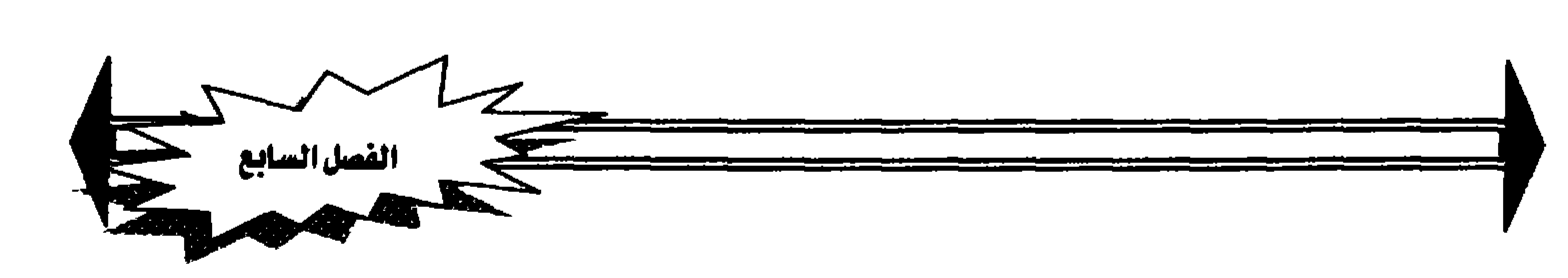
ولو كان هـ∘ق = I فبرهن أن كل من ق و هـ متقابلة.

٤- يقال إلى ق ∋ حَسَ دالة زوجية عندما ق(س*) = ق(-س*) لكل س* ∈ س even function، ويقال إنها دالة فردية عندما -ق(س*) = ق(س*) لكل س*∈ س odd function.

أ) هل توجد دالة فردية وزوجية معاً؟ ولماذا؟

ب) هل توجد دالة لا تكون فردية ولا زوجية معاً؟





جـ) ليكن س = {س* : س* ≤ ٠} فماذا نستطيع القول عن الدالة ى

∋ حَ بحيث أن ى(س*) = س* لكل س* ∋ س، هل هي زوجية أم فردية أم لا تكون؟

د) ليكن س = {س* : | س* | ≥ ٠} مجموعة جزئية في ح ماذا تستطيع القول عن الدالة ى في حَ إذا حققت أحد الشروط التالية لكل:

ى (س*) = س*٢، ى(س*) = | س* | ، ى (س*) = ٣ س*، ى(س*) = ٥

ى(س*) = { ١ : س* عدد نسبي ، ٢ : س* عدد غير نسبي }

هـ) هل مجموع دالتين زوجية تكون دالة زوجية؟ ولماذا؟

و) هل ضرب دالتين زوجية تكون دالة زوجية؟ ولماذا؟

ز) هل مجموع دالتين فردية تكون دالة فردية؟ ولماذا؟

ح) هل ضرب دالتين فردية تكون دالة فردية؟ ولماذا؟

ط) لتكن ى ∋ حَ و هـ ولتكن كل من ى و هـ دالة فردية، فبرهن أن ى ∘ هـ دالة فردية.

٥- أي من الدوال تكون جبرية، وأي منها تكون متسامية، وإن كانت جبرية فأي منها متعددة الحدود وأي منها نسبية؟





أ) $ق \ni ح^ح$ بحيث أن $ق(س^*) = ٣ س^* - \sqrt{٢}$ لكل $س^* \in ح$

ب) $ق \ni ح^ح$ بحيث أن $ق(س^*) = ٣\sqrt{س^* - ٢}$ لكل $س^* \in ح$

ج) $ق \ni ح^س$ بحيث $ق(س^*) = \frac{\sqrt{٢}}{س^* - ٢}$ لكل $س^*$ في $س = \{س^* \ni ح : س^* \neq ٢\}$

د) $ق \ni ح^س$ بحيث $ق(س^*) = \frac{|س^*|}{١ + س^*}$ لكل $س^*$ في $س = \{س^* \ni ح : س^* \neq -١\}$

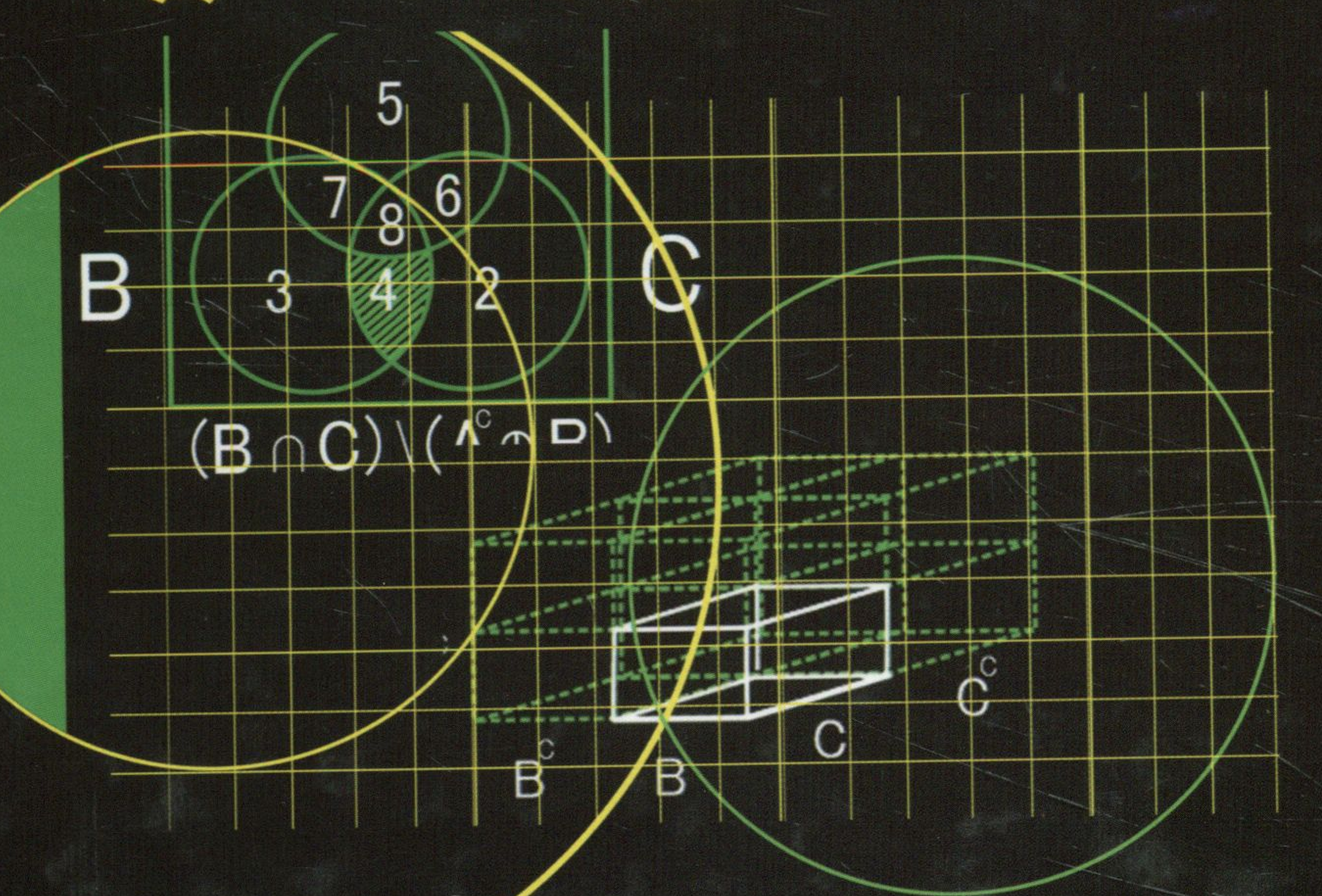
هـ) $ق \ni ح^س$ بحيث $ق(س^*) = \frac{|س^*|}{[س^*]}$ لكل $س^*$ في $س = \{س^* \ni ح : س^* > ٠$ أو $١ \geq ٢ س^*\}$ وارسم مخططاً لكل منهما.

٦- هـ، $ق \ni ح_س$ حيث $س = \{س^* : |س^*| \geq ٢\}$ ارسم مخططاً إلى كل من ق و هـ وأي منهما يكون زوجي أو فردي حيث أن

$ق(س^*) = س^* - [س^*]$ وأن $هـ(س^*) = س^{*٢} - [س^{*٢}]$ لكل $س^* \ni س$



الرياضيات









دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
المملكة الأردنية الهاشمية - عمّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net